INTRODUCCIÓN

Desde tiempos inmemoriales el hombre ha tratado de conocer la Tierra en la cual habita. Al comienzo tuvo curiosidad por conocer el horizonte más cercano, la necesidad de encontrar mejores climas y praderas para su subsistencia, luego su necesidad de comunicarse con otros pueblos lo lleva a traspasar sus fronteras naturales, creando sendas, huellas y caminos le permiten llegar a otros lugares más lejanos y conocer nuevas culturas, el comercio acerca a los pueblos y se desarrollan los medios de transporte terrestre y marítimo, no obstante, se carece de planos y cartas que le permitan orientarse correctamente, poder planificar los tiempos de viaje, conocer el espacio físico donde se encuentra y de los lugares nuevos donde comienza a explorar. Esto conduce a la necesidad de elaborar cartas que representan grandes extensiones de la tierra donde poder dibujar los nuevos lugares descubiertos, los senderos, huellas, caminos y poblaciones existentes, como consecuencia de esta necesidad se hace necesario conocer las dimensiones y forma de la tierra.

Los filósofos griegos fueron los primeros en estudiar la forma y dimensiones de la tierra. En sus primeras aseveraciones postularon una tierra con forma de un disco plano, forma proclamada por Homero. Anaxímenes postula una tierra con forma rectangular, posteriormente Pitágoras, filósofo y matemático, concibe la tierra como una esfera, otros estudiosos de la época sugirieron formas planas, rectangulares, cilíndricas y otras parecidas. Esta última idea tuvo numerosos partidarios, Platón realizó estudios que le permitieron conocer sus dimensiones al igual que Arquímedes, ambos entregaron valores estimativos. En esa misma época Eratóstenes, filósofo griego que vivía en Egipto fue probablemente el primero en hacer mediciones y calcular el tamaño de la esfera, siglo III a. C., a pesar de una gran cantidad de suposiciones completamente erróneas sus resultados relativos a los cálculos de la circunferencia fueron realmente asombrosos para la época (25.000 millas) tomando en consideración los escasos medios que disponía para sus estudios. Es necesario además mencionar a

Posidonio, el cual llegó a un valor de la circunferencia de la tierra de 18.000 millas, este valor fue adoptado por Tolomeo en sus mapas del mundo, los cuales influenciaron fuertemente a los cartógrafo de la Edad Media.

En los tiempos de la Edad Media, la Geodesia no se desarrolla y más aún experimentó un fuerte retroceso, predominó la idea de los partidarios de una tierra plana. Esta situación se mantiene hasta los siglos XV y XVI cuando la razón nuevamente impera, con Galileo defendiendo una tierra esférica y Cristóbal Colón intentándolo probar.

En el siglo XVII con el uso del telescopio las tablas de logaritmos y el método de triangulación la geodesia tiene un gran impulso, fue posible medir las distancias y la gravedad con la precisión necesaria para poder entender que la curvatura de la tierra no era igual en todas partes, esto implicaba dejar de lado la teoría de que la tierra era una esfera, esto permitía concluir que la tierra era aproximadamente un elipsoide.

En 1735 la Academia Francesa de Ciencias decidió enviar dos expediciones, con la finalidad de que midieran la longitud de un arco de un grado a lo largo de un meridiano, uno cerca del polo y el otro cerca de ecuador, para comparar la longitud del arco de meridiano tanto en el polo como en el ecuador; se midió un arco en Laponia en el norte, y otro en el Perú cerca del Ecuador.

Si un arco de un grado de longitud en un meridiano, cerca del polo, era más largo que la longitud de un arco de meridiano cerca del Ecuador, entonces la tierra no era una esfera, sino, un sólido achatado en los Polos. El resultado de las mediciones realizadas por las dos expediciones enviadas por la Academia de Ciencias de Francia, fue que la tierra no era una esfera perfecta, sino, un sólido achatado en los polos, tal como lo había postulado Newton en sus estudios.

No teniendo la superficie de la tierra una forma matemáticamente perfecta, su representación cartográfica, así como la resolución de las mediciones efectuadas en ella, constituyen un problema de difícil solución, sin embargo, los geodestas han tratado de salvar esta situación mediante la adopción de la figura de la tierra como aquella en la cual se encuentra la superficie del mar en calma, en la cual se supone esta superficie libre de los continentes, prescindiendo de todas las causas que alterarían este equilibrio, tales como; mareas, vientos, corrientes, presión atmosférica, etc. La superficie así formada recibe el nombre de GEOIDE, la que se define como una superficie de nivel normal en todo sus puntos a la dirección de la gravedad y que presenta la siguiente propiedad:

> "El plano tangente a cualquiera de sus puntos es normal a la dirección de la gravedad"

Como el GEOIDE es una superficie equipotencial, el potencial gravitacional en cualquiera de sus puntos será el mismo y la dirección de la gravedad en cualquier punto de él será perpendicular al GEOIDE.
Es importante entender que el Geoide es sólo una de las infinitas familias de superficies equipotenciales posibles, cada una de ellas con un potencial gravitacional diferente. El Geoide se ha considerado como la superficie equipotencial que corresponde **al Nivel Medio del Mar**.

Si la tierra tuviera una densidad uniforme y la topografía de ella no fuera irregular, el Geoide tendría la forma de un ELIPSOIDE, centrado sobre el centro de masa de la tierra. Este sólido es la superficie que más se aproxima al Geoide y para el cual se le definen las siguientes características:
" *La tierra es un Elipsoide de Revolución, achatado en los polos, siendo la vertical en cada punto perpendicular a la superficie del Elipsoide, y el eje de rotación de la tierra es el eje de rotación del Elipsoide de Revolución.* "

Los efectos sobre el Geoide debido a las variaciones en la densidad de la tierra son los siguientes:

a) Donde existe deficiencia de masa, el Geoide se hundirá por debajo del Elipsoide y
b) Donde existe un exceso de masa, el Geoide se levantará por sobre el Elipsoide

Geoide

Considera las aguas del océano como materia homogénea que se mueven libremente, las cuales están sujetas únicamente a la fuerza de gravedad de la tierra. Después de alcanzar un estado de equilibrio, la superficie de tales océanos idealizados asume una superficie de nivel del campo de gravedad. W= W0

El geoide es una superficie de nivel cerrada y continua que se extiende parcialmente dentro del cuerpo sólido de la tierra. La curvatura del geoide muestra discontinuidades a variaciones abruptas de densidad. Es adecuado como una superficie de referencia para diferencias de potencial o altura (W. Torge)

Potencial Gravitacional

Es la energía potencial por unidad de masa colocada en el campo gravitacional. Así si en un cierto punto en un campo gravitacional, una masa m' tiene una energía potencial "ep" el potencial gravitacional en dicho punto es:

$$V = Ep/m'$$

El potencial gravitacional se expresa en las unidades de Joule*Kg^{-1} o en m^2 *seg^2. Uniendo los puntos en los cuales el potencial gravitacional tiene el mismo valor, podemos obtener una serie de superficies "Equipotenciales". Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de fuerza.

Cuando se desplaza una partícula de uno de los puntos de una superficie equipotencial a otro en la misma superficie, el trabajo realizado por el campo gravitacional que actúa sobre la partícula es cero. Esto se debe que el trabajo realizado es igual al cambio de potencial. En este caso no hay cambio en la energía potencial debido a que los puntos tienen el mismo potencial gravitacional

$$W = F^* S$$

El trabajo es igual a la fuerza ejercida sobre un cuerpo por el desplazamiento que logra realizar dicha fuerza. La fuerza es una unidad vectorial y el desplazamiento es escalar.

Energía Potencial gravitatoria

El trabajo de la fuerza gravitatoria depende sólo de las alturas iniciales y final, y no de la trayectoria. Si los puntos están a la misma altura, el trabajo es nulo. La energía potencial gravitatoria "Ep" queda expresada por:

Ep= (m*g*Y2 – m*g*Y1)

F = m*g

La fuerza es igual a la masa por la aceleración de gravedad y el trabajo “W” se expresa por la fuerza por su desplazamiento. La variación de trabajo de Y1 a Y2 es lo que se denomina Energía Potencial Gravitatoria.

Modelos Físicos de la Tierra

a) Elipsoide Internacional 1924

$$\boldsymbol{\gamma = 978049 * [1 + 0,0052884 * sen\theta^2 - 0,000059 * sen(2\theta)^2]}$$

En miligales

a= 6378388

f= 1/297

b) GRS-67

$$\boldsymbol{\gamma = 978031,84558 * \frac{[1 + 0,00193166338321 * sen\theta^2]}{[1 - 0,00669460532856 * sen\theta^2]^{0.5}}}$$

En miligales

a= 6378160

f= 1/298,247167427

c) GRS-80

Precisión de 0,1 miligal

$$\gamma = 9,780326 * [1 + 0,0052790414 * sen\theta^2 + 0,0000232718 * sen\theta^4 + 0,0000001262 * sen\theta^6 + 0,0000000007 * sen\theta^8]$$

a= 6378137

f= 1/298,257222101

γ = en gal

d) WGS- 84

$$\gamma = \gamma e * \frac{1 + k * sen\theta^2}{[1 - e^2 * sen\theta^2]^{0.5}}$$

$$k = \frac{b * \gamma e}{a * \gamma p} - 1$$

k = 0,00193185265241

γe = 9,8321849378 m/seg^2 ; en gales (gravedad en el Ecuador)

γp = 9,7803253359 m/seg^2 ; en gales (gravedad en el Polo)

a= 6378137

f = 1/298,257223

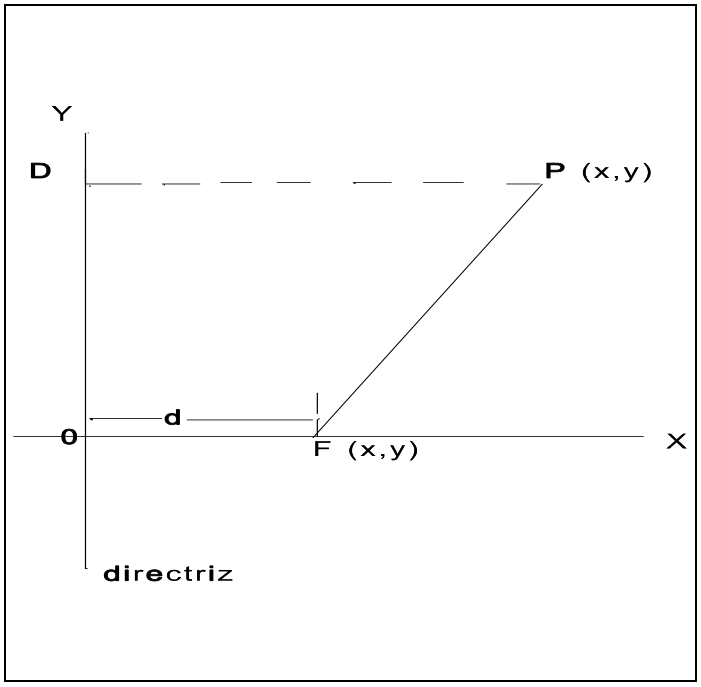
b/a = 0,996647189335

GEOMETRIA DEL ELIPSOIDE

ELIPSE

(e < 1)

La Elipse forma parte de la familia de las cónicas, y es la superficie matemática de mayor trascendencia en la Geodesia, es por esta razón es que la estudiaremos con algún detalle:



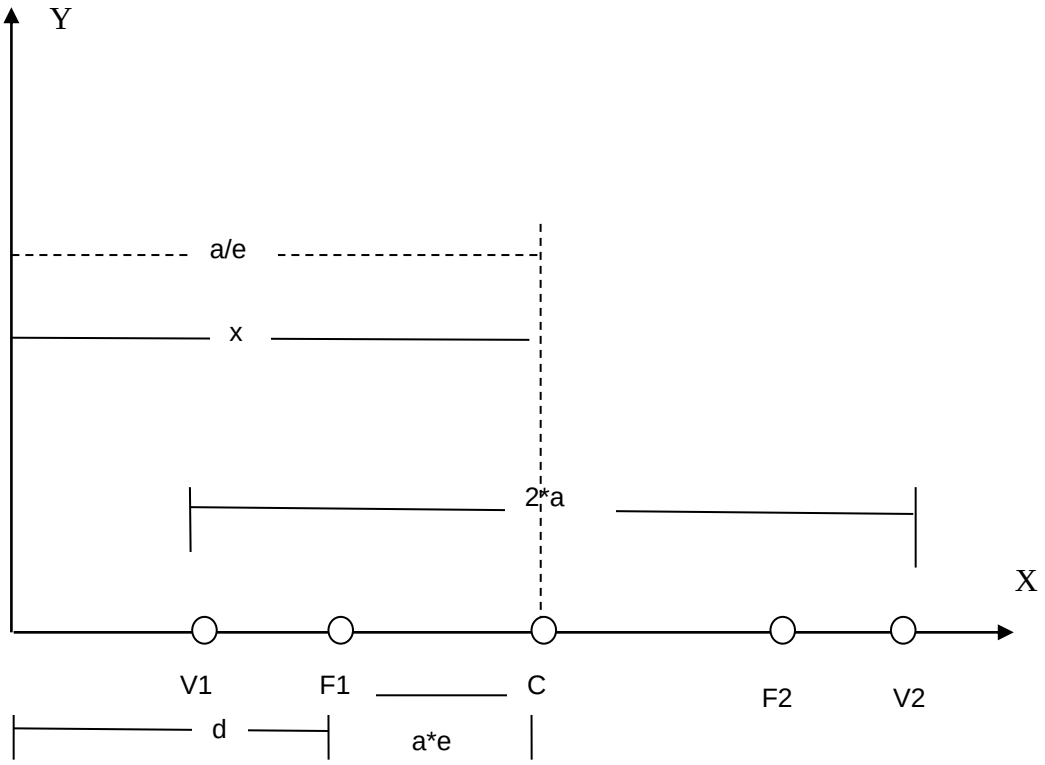
PF/PD = e

$$e = \sqrt{((x-d)^2 + y^2} / x$$

ECUACION GENERAL

$$(x - d)^2 + y^2 = e^2 * x^2$$

En la elipse existen 2 vértices: V1 = d/(1+e), 0 ; V2 = d/(1-e), 0



Llamaremos eje mayor de la Elipse, que denotamos por 2*a, a la distancia entre vértices, " a " es el semi-eje mayor de la elipse

- Se llama centro de la elipse, que denotamos por " c", al punto medio de V1 y V2, luego se tiene que:

2*a = 0V2 - 0V1

$2*a = d/(1-e) - d/(1+e) = (d(1+e) - d(1-e))/(1-e^2)$

$2*a = 2*d*e/(1-e^2)$, finalmente tendremos; $\mathbf{a = (d*e)/(1-e^2)}$

Si tenemos que:

$C = 1/2 *((d/(1+e) + (d/(1-e))) = 1/2* ((d*(1-e) + d*(1+e))/(1-e^2))$

$C = 1/2*(2*d)/(1-e^2)$

$C = d/(1-e^2)$, finalmente tenemos que; **$C= a/e$**,

$d=a/e - a*e$; $h=a/e$

De la ecuación general de la cónica

$(x-d)^2 + y^2 = e^2 * x^2$

Obtendremos la ecuación de la elipse central

$x = x'+ h$; $x= x' + a/e$

$y = y'$

$(x' + a/e -a/e +a*e)^2 + y' = e^2*(x' + a/e)^2$

$(x' + a*e)^2 + y' = e^2x'^2 + 2*x'*e^2* (a/e) + e^2*(a^2/e^2)$

$x'^2 + a^2 *e^2 + y'^2 = e^2*x'^2 + e^2*(a^2/e^2)$

$x'^2*(1-e^2) + y'^2 = -a^2*e^2 + a^2$

Sí $b^2 = a^2*(1-e^2)$

$x'^2*(1-e^2) +y'^2 = b^2$

$x'^2 * b^2/a^2 +y'^2 = b^2 \quad / 1/b^2$

$x'^2/a^2 +y'^2/b^2=1$

Entonces tendremos:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; Ecuación de la elipse centrada en el origen.

Se llama semi-eje menor de la elipse a b, donde $b= a^2*(1-e^2)$; como $e <1$ entonces

$a>b$, luego de la ecuación de la elipse:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 =1$

$x^2 = a^2 *(1-y^2/b^2)$

$x^2 = a^2/b^2 *(b^2-y^2)$

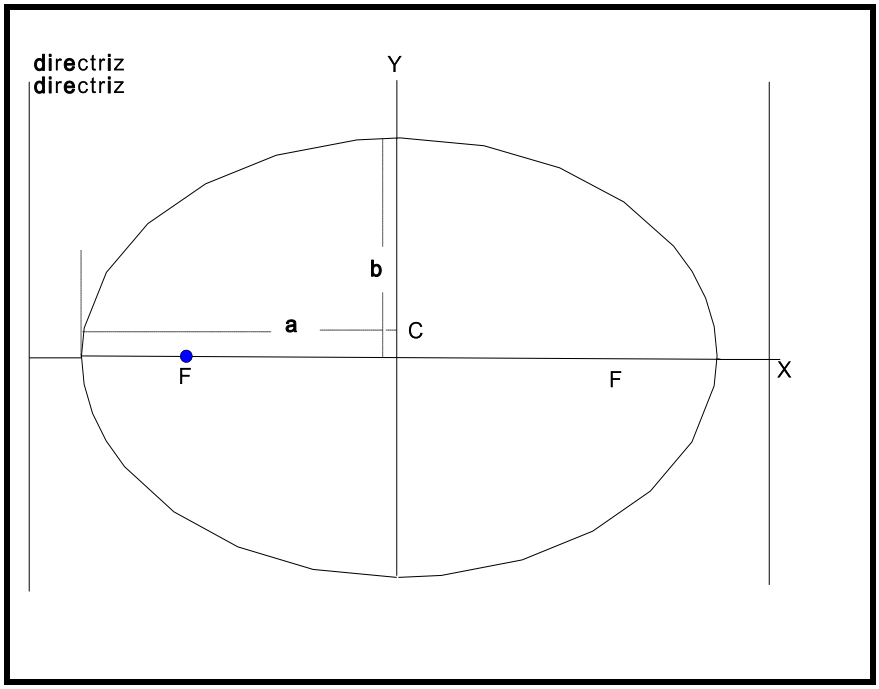
$b^2-y^2 >= 0$
$y = b^2$
Por lo tanto -b =<y =<b

en forma análoga, en el eje y

$y^2 = b^2 * (a^2-x^2)$

$a^2-x^2>=0$, por lo tanto $a^2 >= x^2$, luego tendremos que; -a =< x =< a

Esto nos lleva a concluir que la elipse es una curva cerrada, como se muestra en la figura

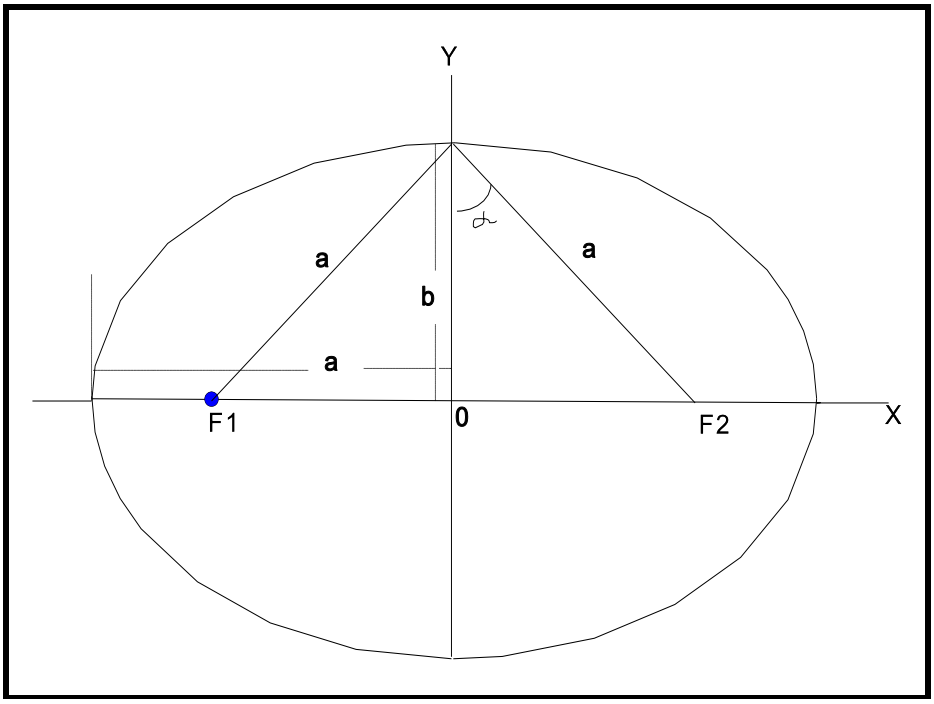


PROPIEDADADES DE LA ELIPSE

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

1. - Centro : C = (0,0)
2. - Vértices: V = (+/- a,0)
3. - Focos : F = (+/- a*e, 0)
4. - Excentricidad: e = c/a
5. - Directrices : x = +/- a/e

6.- $b^2 = a^2 * (1-e^2)$; $e^2 = (a^2-b^2)/a^2$; $e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$



Luego estamos en condiciones de definir algunos parámetros principales de la elipse.

1. - Achatamiento Polar : f : f = (a-b)/a

2. - Primera Excentricidad: e: $e = OF2 / a = \sqrt{(a^2 - b^2)} / a$

$e^2 = (a^2 - b^2)/ a^2$

$$(OF2)^2 + b^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad OF2 = \sqrt{(a^2 - b^2)}$$

3. - Segunda Excentricidad : e'

$e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$

4. - Excentricidad Angular : α

COS α = b/a ; f = a/a - b/a ; f = 1-b/a ; luego 1-f = b/a

COS α = 1- f

SEN α = 0F2/a ; $OF2 = \sqrt{(a^2 - b^2)}$

SEN α = $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ /a

TAN α = 0F2/b = e'

RELACIONES

1) $e^2 = 2*f - f^2 = f*(2 - f)$

2) $e'^2 = e^2/(1- e^2)$

3) $b/a = (1-f) = \sqrt{(1-e^2)} = e/e'$

4) $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 1- b^2/a^2$

5) $b^2/a^2 = 1 - e^2$

6) $f = 1 - b/a$

7) $(1- e^2) = (1- f)^2$

8) $(1 - e^2) = 1- 2*f +f^2$

EJERCICIOS:

1. - Hallar elementos de: $x^2/16 + y^2/9 = 1$

Solucionando tendremos: a = 4 ; b = 3 ; Centro = (0,0)

Vértices = (+/- 4,0)

Excentricidad (e) = $\sqrt{(16-9)/16}$; e = +/- 1/4 * $\sqrt{7}$

Focos (F) = (+/- $\sqrt{7}$, 0)

Directrices: x= +/- a/e ; entonces x= +/- 4/(1/4 $\sqrt{7}$) ; luego x=+/- 16/$\sqrt{7}$

2. - Encontrar elemento de: 2x2 +4y^2 +12x +10 = 0

Formaremos un cuadrado de binomio con los elemento de x, para lo cual se sumará 9 en ambos lados de la ecuación
$x^2 + 6x + 9 + 2y^2 + 5 = 9$

$(x+3)^2 + 2y^2 = 4$; dividiendo por 4 se tendrá:

$(x + 3)^2 /4 + y^2/2 = 1$; luego de formada la ecuación de la elipse, se identificará los elementos de ella, esta elipse se encuentra desplazada en el eje X :

a= 2 b= $\sqrt{2}$; $(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$; h = -3 , k = 0

Centro = (h,k) = (-3,0)
Vértices =(h+/- a, k) = (-3 +/- 2, 0)

Focos = (h+/- C ,k) = (-3 +/- $\sqrt{(4-2)}$, 0)

Excentricidad (e) = $\sqrt{2}/2$

Directrices: X = -3 +/- 2/$\sqrt{2}/2$; por lo tanto X = -3 +/- 4/ $\sqrt{2}$

3.- Hallar Ecuación de la Elipse:

Vértices: (4,0) y (-4,0)

Focos : (3,0) y (-3,0)

Planteamos la ecuación general de la elipse : $(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$

h = 0 y k = 0 ; luego se tiene que : a= 4 ; Centro = (0,0)

$a^2 = CF^2 + b^2$; $16 = 9 + b^2$; luego , b =$\sqrt{(16-9)}$; b = $\sqrt{7}$

La ecuación general de la elipse para este caso es el siguiente:

$$\boxed{x^2/16 + y^2/7 = 1}$$

4.- Hallar la ecuación de la Elipse : Vértices : (1,1) y (7,1) , e = 1/3

(1+7)/2 =4 ; Centro =(4,1) ; h = 4 y k= 1 ; 2a = 7-1 = 6 ; a = 3

$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$; $1/9= 1 - b^2/9$;

$(1- 1/9) * 9 = b^2$; $\sqrt{8} = b$;

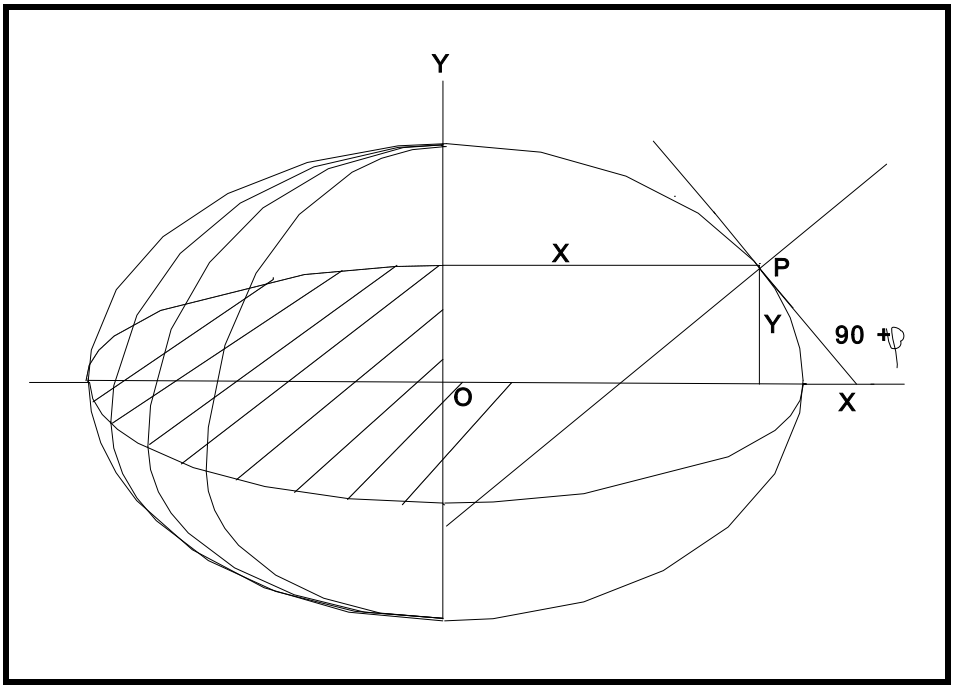
Por lo tanto la ecuación de esta Elipse es la siguiente:

$$\boxed{x^2/9 + y^2/8 = 1}$$

TABLA DE ELIPSOIDES

NOMBRE	AÑO	a	f	USADO EN
EVEREST	1830	6377276	1/300.8	INDIA
AIRY	1830	6377563	1/299.3	Gran Bretaña
BESSEL	1841	6377397	1/299.15	JAPÓN
CLARKE	1866	6378206,4	1/295	AMERICA DEL NORTE
FAYE	1880	6.378.249,145	1/293,465	FRANCIA-AFRICA
HELMERT	1907	6.378.200	1/298,3	EGIPTO
INTERNACIONAL	1924	6.378.388	1/297	EUROPA-S.AMÉRICA
Krassowy	1940	6.378.245	1/298,3	RUSIA
FISCHER	1960	6.378.155	1/298,3	
FISCHER	1968	6.378.150	1/298,3	
W.G.S. 67	1967	6.378.160	1/298,247167427	S. G. M.
Sudamericano	1969	6.378.160	1/298,25	Sudamérica
W.G.S. 72	1972	6.378.135	1/298,25	S. G. M.
GRS 80	1980	6378137	1/298,257222101	(IAG-79) S.G.M.
W.G.S. 84	1984	6.378.135 +/-2	1/298,257223563	S. G. M.

CALCULO DE COORDENADAS RECTANGULARES



De la figura podemos derivar las coordenadas rectangulares X , Y del punto P, como sigue :

COORDENADA X

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2 b^2$

Diferenciando con derivadas parciales tendremos:

$2xb^2 dx + 2a^2y dy = 0$; $xdx = -(a^2y/b^2) dy$; $x = (-a^2/b^2) y dy/dx$

$(a^2-b^2)/a^2 = e^2$; entonces : $e^2 = 1 - b^2/a^2$; $1-e^2 = b^2/a^2$

$x = - (1/(1-e^2)) y dy/dx$

$dy/dx = Tag\ (90 + \varphi) = -\ Ctg\ \varphi$

$x = -(1/(1-e^2))\ y\ (-Ctg\ \varphi)$; $y = (1-e^2)\ x\ /Ctg\ \varphi$; $y = (1-e^2)\ x\ Tag\ \varphi$

$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2\ b^2$; dividiendo la expresión por $1/b^2$, nos queda

$x^2 + y^2\ a^2/b^2 = a^2$; $x^2 + x^2\ (1- e^2)^2\ Tag^2\ \varphi\ (1/(1-e^2)) = a^2$

$x^2\ [\ 1 + (1 -e^2)\ Tag^2\ \varphi\ ] = a^2$

$x^2 = a^2 / (1 + (1-e^2)Tan^2\ \varphi)$; $x^2 = a^2 / (1 + (1-e^2)\ sen^2\ \varphi/Cos^2\ \varphi)$

$x^2 = a^2\ Cos^2\ \varphi/(\ Cos^2\ \varphi + (1-e^2)Sen^2\ \varphi)$;

$x^2 = a^2\ Cos^2\ \varphi\ /(\ Cos^2\ \varphi + Sen^2\ \varphi - e^2\ Sen^2\ \varphi)$

$x^2 = a^2\ Cos^2\ \varphi/\ (1- e^2\ Sen^2\ \varphi)$

$$\boxed{\mathbf{X = a\ Cos\ \varphi\ /\ (1- e^2\ sen^2\ \varphi)^{1/2}}}$$

COORDENADA Y

$X =(\ 1/(1-e\ )\ )Y\ Ctg\ \varphi$; $x^2\ b^2 + y^2\ a^2 = a^2\ b^2$; dividiendo por $1/a^2$, tenemos

$x^2\ b^2/a^2 + y^2 = b^2$; $(1/(1-e^2))^2\ y^2\ Ctg^2\varphi\ b^2/a^2 + y^2 = b^2$

$Y^2\ [\ 1+ Ctg^2\varphi/(1-e^2)\ ] = b^2$; $Y^2 = b^2\ /(\ 1 +Ctg^2\varphi/(1-e^2))$

$Y^2 = b^2\ (1-e^2\ )\ Sen^2\varphi/((1-e^2\ )Sen^2\varphi + Cos^2\ \varphi)$

$Y^2 = a^2\ (1-e^2)^2\ Sen^2\varphi/(1-e^2\ Sen^2\varphi)$

$$\boxed{\mathbf{Y = a(1- e^2)\ Sen\varphi/(1-e^2\ Sen^2\varphi)^{1/2}}}$$

RADIOS DE CURVATURA EN EL ELIPSOIDE

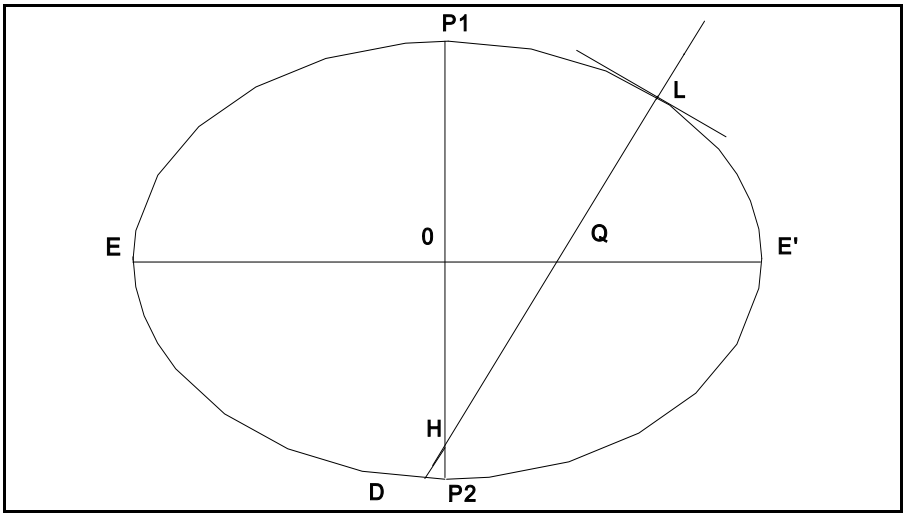
Todos los planos que pasan por la normal a un punto del Elipsoide cortan a este según unas secciones denominadas SECCIONES NORMALES que en la mayoría de los casos son Elipses.

De las infinitas Secciones Normales que pueden trazarse desde un punto L del Elipsoide, hay que distinguir dos:

1.- La Sección Meridiana, P1E'P2E

2.- La Sección Normal Principal, representado por la recta LD. Esta Sección es normal a la Sección Meridiana.

Estas dos Secciones se denominan Secciones Principales; a la Sección Meridiana le corresponde el radio mínimo de curvatura y a la Sección Normal le corresponde el radio máximo de curvatura.



Para hallar el radio de curvatura en una dirección arbitraria podemos utilizar la fórmula de EULER:

$$1/R = \mathrm{Cos}^2\,\alpha\,/\rho + \mathrm{Sen}^2\,\alpha/N$$

Donde R es el radio de curvatura arbitrario; α es el ángulo medido desde la Sección principal, N es una dirección normal y principal, ρ es el radio de curvatura en la dirección de la otra dirección normal principal.

RADIO DE CURVATURA EN EL MERIDIANO (ρ= M)

Considerar la determinación de ρ si tenemos una curva plana especificada como Z= f(x), el radio de curvatura ρ es un punto sobre la curva, es el valor recíproco de la curvatura en ese punto, luego:

$$\boxed{\rho = \frac{1}{R} = \frac{(1+y^{2}')^{3/2}}{y''}}$$

Siendo y' e y" la primera y segunda derivada de Y respecto a X

dy/dx = Tg (90º + φ) = -Ctg φ = -Cosφ /Senφ; luego tendremos :

$d^2y/dx = -(-Cosec^2\ \varphi\ d\varphi/dx) = Cosec^2\ \varphi\ d\varphi/dx$

$d^2y/dx =(1/Sen^2\varphi)\ d\varphi /dx$; si : $X = (aCos\varphi)/(1-e^2Sen^2\varphi)^{1/2}$; diferenciando la expresión:

$dx/d\varphi_=a[-sen\varphi\ (1-e^2sen^2\varphi)^{-1/2}+a*Cos\varphi(-1/2)(1-e^2sen^2\varphi)^{-3/2} * (-e^2 2Sen\varphi Cos\varphi)]$

$dx/d\varphi=a\ [\ -sen\varphi(1-e^2sen^2\varphi)^{-1/2} - 1/2\ Cos\varphi e^2\ 2\ sen\varphi Cos\varphi(1-e^2Sen^2\varphi)^{-3/2}\ ]$

$= a\ [-sen\varphi(1-e^2sen^2\varphi)^{-1/2} + 1/2\ Cos^2\varphi e^2 2Sen\varphi(1-e^2Sen^2\varphi)-^{3/2}]$

$= a\ [-sen\varphi(1-e^2Sen^2\varphi)^{-1/2} + Cos^2\varphi sen\varphi e^2(1-e^2Sen^2\varphi)^{-3/2}\ ]$

$= a\ sen\varphi(1-e^2sen^2\varphi)^{-3/2}\ [\ -(1-e^2Sen^2\varphi) + e^2Cos^2\varphi]$

$= aSen\varphi(1-e^2Sen^2\varphi)^{-3/2}[-1 + e^2\ ]$

$$y' = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a(1-e^2)sen\varphi}{(1-e^2sen^2\varphi)^{3/2}}$$

$y" = d^2y/dx^2 = (1/Sen^2\ \varphi\ )\ d\varphi/dx$

$$y'' = -\frac{1}{sen^2\varphi} * \frac{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}{a(1-e^2)sen\varphi}$$

$$y'' = -\frac{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}{a * sen^3\varphi(1-e^2)}$$

Sustituyendo los valores de y' e y" en la ecuación del radio de curvatura de una curva plana, tendremos:

$$\rho = \frac{(1 + (-ctg\varphi)^2)^{3/2}}{(1 - e^2 sen^2\varphi)^{3/2} / a * sen^3\varphi(1 - e^2)}$$

$$\rho = \frac{a * sen^3\varphi * (1-e^2) * (1+ctg^2\varphi)^{3/2}}{\left((1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}\right)}$$

$$\rho = \frac{a * sen^3\varphi * (1-e^2) * \left(\frac{(sen^2\varphi + \cos^2\varphi)}{sen^2\varphi}\right)^{3/2}}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{a*(1-e^2)}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}}$$

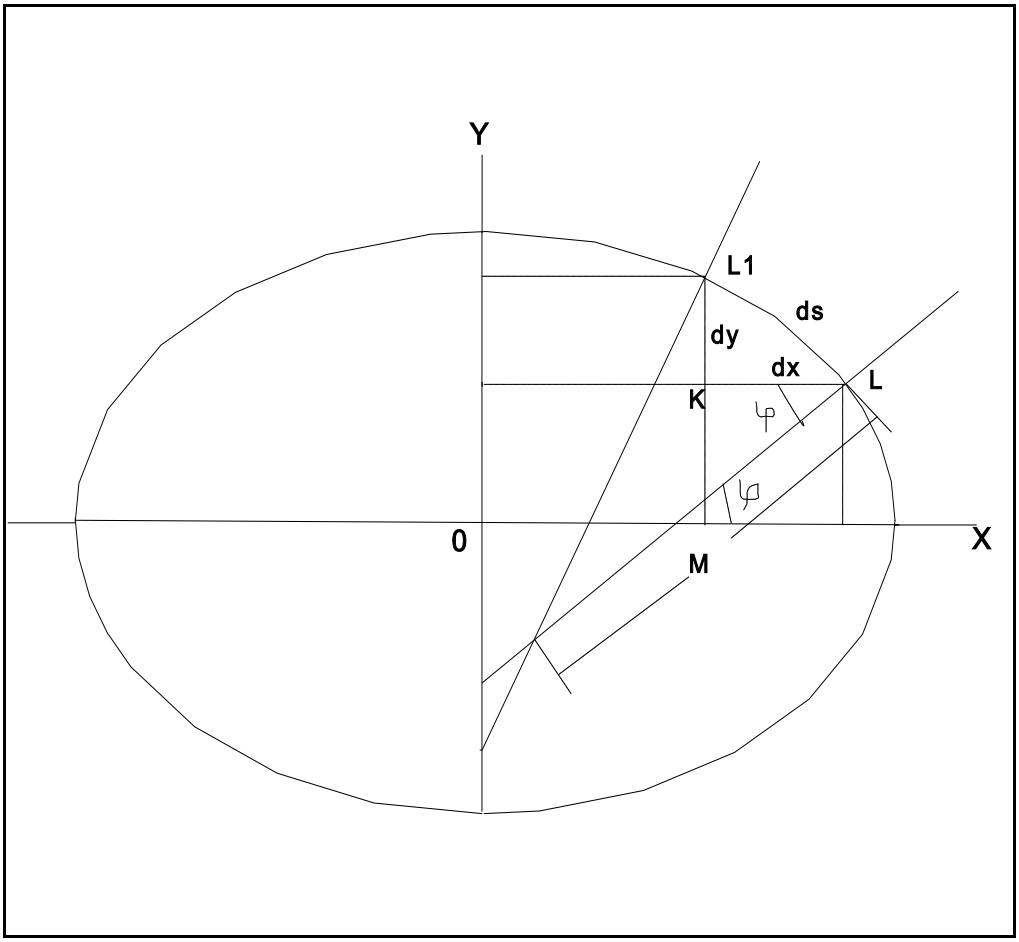
En el Ecuador:

$\rho_0 = a(1-e^2) = a(1-f)^2$

En el Polo:

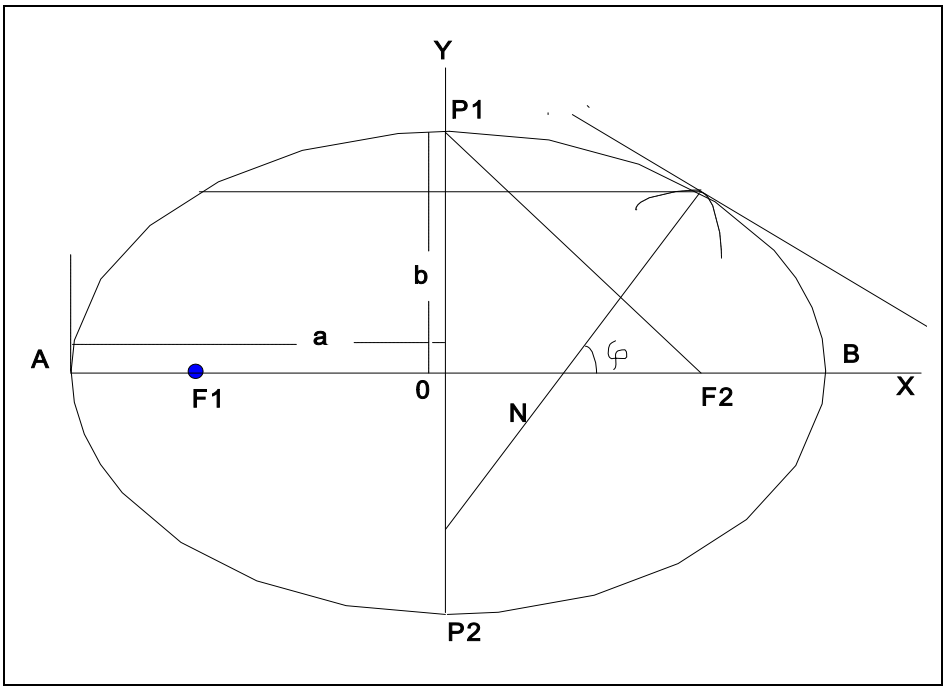
$\rho_{90} = a/(1-e^2)^{1/2} = a/(1-f)$;

por lo tanto en el polo $\rho = N$


Y
L1
ds
dy
dx
L
K
φ
φ
0
X
M

RADIO DE CURVATURA EN EL PRIMER VERTICAL

Usaremos el teorema de MENIER, en el cual el radio de curvatura de una sección



inclinada es igual al radio de curvatura de una sección normal, multiplicada por el coseno del ángulo entre las secciones.

$$X = N \cos \varphi$$

$$N = X / \cos \varphi$$

$$X = a\cos \varphi \ /((1-e^2 sen^2_)^{1/2})$$

$$\boxed{N = \frac{a}{(1-e^2 sen^2 \varphi)^{1/2}}}$$

En el Ecuador :

$N\varphi_ _{=0} = a$

En el Polo :

$N\varphi_{=90} = a/ ((1-e^2)^{1/2}) = a/(1-f)$

Radio de Curvatura en una Sección

Si α es el azimut de una línea se puede expresar la ecuación del radio de curvatura de la manera siguiente:

$1/R\alpha = Sen^2\alpha/N + Cos^2\alpha/\rho$

$$\boxed{R\alpha = \frac{N\rho}{N\cos^2\alpha + \rho sen^2\alpha}}$$

RADIO MEDIO DE CURVATURA

El radio medio de curvatura o Radio Gaussiano, se define como la integral de $R\alpha$ que varía entre 0º y 360º Designando por Rm tal radio se tiene :

$$Rm = \frac{1}{2}\pi\int_0^{2\pi} R\alpha * d\alpha$$

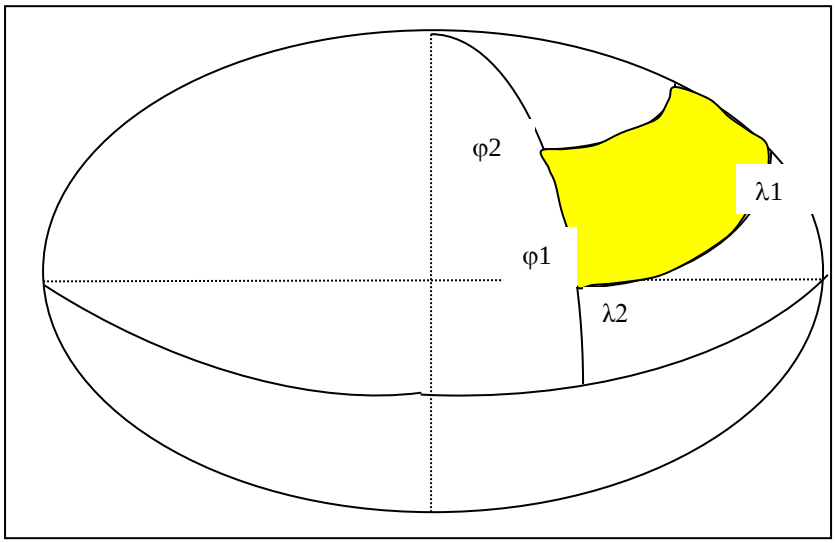
$$Rm = \frac{1}{2}\pi\int_0^{2\pi} \frac{\rho N}{(N\cos^2\alpha + \rho sen^2\alpha)} d\alpha$$

$$\boxed{Rm = \sqrt{\rho * N}}$$

Este Radio es de utilidad cuando se necesita el radio de una esfera que se aproxime al elipsoide

CALCULO DE AREAS EN LA SUPERFICIE DE UN ELIPSOIDE

Si se desea calcular el área de una figura en el elipsoide, limitada por meridianos y paralelos conocidos, es necesario conocer primero la figura diferencial que ella forma y luego deducir su valor analítico.



La figura diferencial formada por $\lambda 1\lambda 2\varphi 1\varphi 2$, nos muestra $\lambda 2$

$\varphi 1\varphi 2$=> arco de meridiano

$\lambda 1\lambda 2$=> arco de paralelo

de las definiciones analíticas para la determinación de un arco de paralelo como para encontrar el valor de un arco de meridiano, tendremos que:

Arco de paralelo $= N\cos\varphi \, d\lambda$

Arco de meridiano $=\rho \, d\varphi$,

de las definiciones anteriores tendremos entonces que la superficie de la figura sobre el elipsoide formada por el perímetro $\varphi 1,\varphi 2,\lambda 1,\lambda 2$ queda determinada por :

Superficie(S) = = $N\cos\varphi d\lambda * \rho d\varphi$

$N*\rho = a^2(1 - e^2)/(1- e^2 sen^2\varphi)^2 = b^2/(1 - e^2 sen^2\varphi)^2$

$$S = b^2 \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \int_{\lambda 1}^{\lambda 2} \frac{\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2)^2} d\varphi * d\lambda$$

Integrando respecto a λ se tendrá:

$$S = b^2 \Delta\lambda \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \frac{\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^2} d\varphi$$

Desarrollando al interior de la integral el valor de (1- $e^2 sen^2\varphi)^{-2}$, por medio de la serie

$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + ...$; se tendrá el desarrollo siguiente

$S = b^2 \Delta\lambda \cos\varphi[1 + 2 e^2 sen^2\varphi + 3e^4 sen^4\varphi + 4e^6 sen^6\varphi + ...]d\varphi,$

$$S = b^2 \Delta\lambda \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} (\cos\varphi + \cos\varphi * 2e^2 sen^2\varphi \cos\varphi + 3e^4 sen^4 \cos\varphi + 4e^6 sen^6 \cos\varphi + ...) d\varphi$$

La superficie de una figura en el elipsoide queda entonces definida al resolver esta integral:

$$\int sen^m\ x * cosx\ dx = \frac{sen^{m+1}x}{m+1}$$

$S = b^2 \Delta\lambda[(sen\varphi 2 - sen\varphi 1) + (2/3) e^2 (sen^3\varphi 2 - sen^3\varphi 1) + (3/5) e^4 (sen^5\varphi 2 - sen^5\varphi 1) + (4/7) e^6 (sen^7\varphi 2 - sen^7\varphi 1) + ...]$

Si deseamos calcular la superficie de la mitad del elipsoide, entonces definiremos que

$\varphi 1 = 0^o$, $\varphi 2 = 90^o$; $\lambda 1 = 0^o$, $\lambda 2 = 360^o = 2\pi$

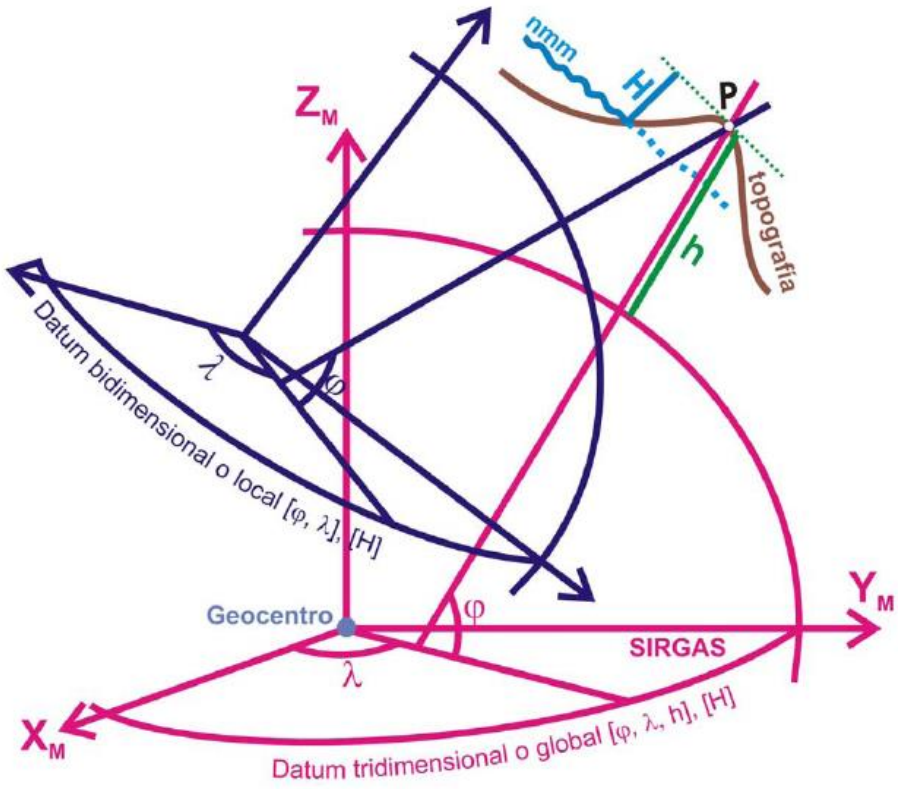
$S = 2 b^2 \pi[1 + (2/3)e^2 + (3/5) e^4 + (4/7) e^6 + (5/9) e^8 + (6/11) e^{10} + ...]$

La superficie total del elipsoide será la siguiente:

$S = 4 b^2 \pi[1 + (2/3)e^2 + (3/5) e^4 + (4/7) e^6 + (5/9) e^8 + (6/11) e^{10} + ...]$

CALCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONALES

Coordenadas rectangulares: X, Y, Z son coordenadas cartesianas con respecto a una terna de ejes fijos a la Tierra con origen en su baricentro. El eje X está dirigido al meridiano de Greenwich, el eje Y a 90º de X y el eje Z en dirección al Polo



Las coordenadas elipsoidales

Las coordenadas cartesianas no son prácticas para visualizar la localización de un punto, de manera que las tradicionales Latitud, Longitud y altura elipsoidal mantienen plenamente su vigencia.

Es claro que la definición de las coordenadas geodésicas requiere el agregado de un nuevo elemento, un elipsoide asociado al sistema cartesiano. Asociado quiere decir que el centro del elipsoide coincide con el origen del sistema cartesiano, que está orientado de manera que los ejes X, Y yacen en el plano ecuatorial del elipsoide, que el meridiano que contiene a los ejes X y **Z** es el origen *de* las longitudes, y que el eje menor del elipsoide coincide con el eje Z.

No obstante, diversos elipsoides podrían cumplir con estas condiciones. El elipsoide de referencia queda completamente determinado con dos parámetros: el semieje mayor a y el achatamiento f, que fijan respectivamente el tamaño y la forma.

$$X = ((N + h) * cos\varphi * cos\lambda$$

$$Y = (N + h) * cos\varphi * sen\lambda$$

$$Z = [N * (1 - e^2) + h] * sen\lambda$$

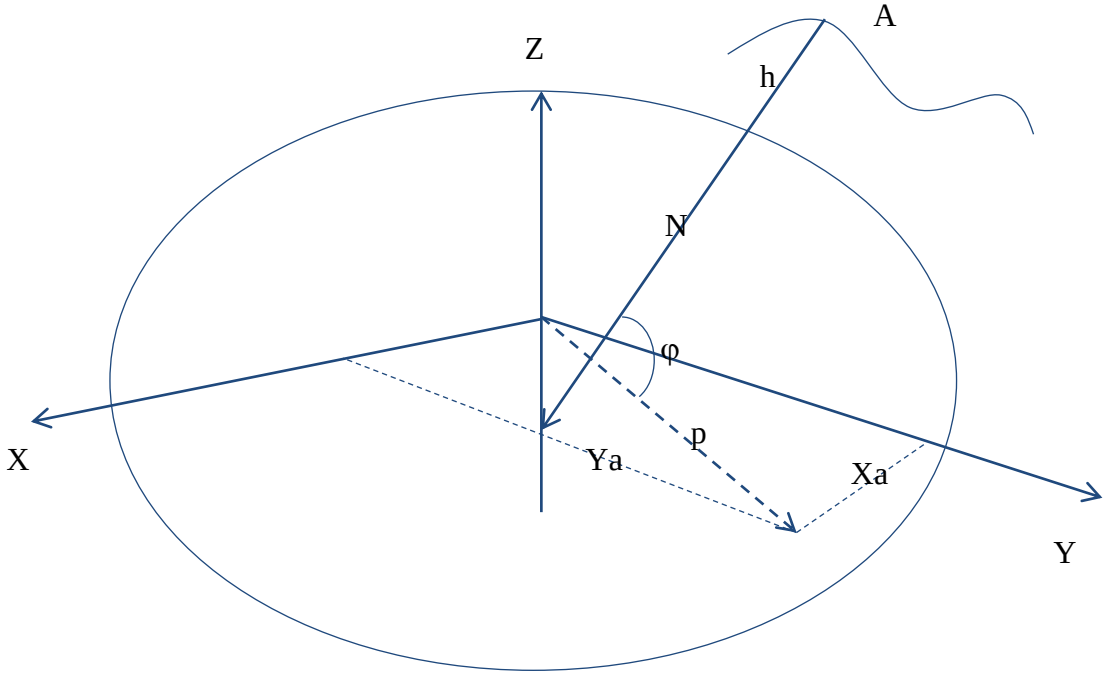
$$\lambda = arct\left[\frac{Y}{X}\right]$$

$$\varphi = arctang\left[\frac{Z + e'^2 * b * sen^3\theta}{p - e^2 * a * cos^3\theta}\right]$$

$$\theta = arctang\left[\frac{Z * a}{p * b}\right]$$

$$p = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$

$$h = \left[\frac{p}{Cos\varphi} - N\right]$$


A
Z
h
N
φ
X
p
Ya
Xa
Y

SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERENCIA

Un sistema geodésico de referencia es una estructura conformada por un punto Datum: origen de coordenadas, orientación, definición de un modelo matemático de la tierra, y de un Marco conformado por una red de puntos materializados sobre la superficie terrestre.

El **Datum**, punto de referencia de las posiciones, consta básicamente de los siguientes elementos:

Posición geográfica, Latitud y Longitud

Orientación, acimut

Orientación de sus ejes, en el caso de Datum Tridimensional

Altura geoidal

Definición de parámetros de un elipsoide.

El **Marco de Referencia,** consiste en la materialización en terreno de una red de puntos, cadena de triangulación, red de poligonación geodésica, red de puntos, los cuales se encuentran referidos al Datum definido ´para el sistema Geodésico.

Los sistemas geodésicos pueden ser Locales o Globales. Los Datum locales pueden abarcar un continente o una determinada región de este. Los Datum globales corresponden a redes geodésicas mundiales.

Ejemplo: de Datum locales regionales son el PSAD-56 en la Canoa, Venezuela, SAD-69 en Chua, Brasil, Datum Bogota en Colombia, Campo Inchauspe en la Argentina, Yacare en Uruguay, Datum Astro Hito XVIII en Tierra del Fuego, Chile, San Lorenzo, en Bolivia.

Ejemplo de Datum Global es el WGS-84.

Los Sistemas Geodésicos pueden Bidimensionales o Tridimensionales. Los Sistemas Geodésicos Bidimensionales se encuentran en los sistemas geodésicos locales principalmente, definen las posiciones geográficas (latitud y longitud) y acimut. Se pueden mencionar entre otros los sistemas geodésicos originados por los Datum; PSAD-56, Bogota, Yacaré, Campo Inchauspe, Astro Hito XVIII.

Los Sistemas geodésicos tridimensionales generan en cada una de sus posiciones una triada de coordenadas X,Y, y Z, que permiten encontrar las correspondientes coordenadas geográficas, latitud y longitud, y la cota elipsoidal. Entre los sistemas tridimensionales se pueden mencionar; WGS 84, GALILEO, en Europa, SIRGAS, sistema geodésico de las Américas (Sudamérica y América Central), POSGAR en la Argentina.

LOS SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERENCIA
(Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999)

1.1 Introducción

Los trabajos geodésicos, que implican la ubicación o posicionamiento de puntos dentro de nuestro planeta, requieren siempre una clara definición sobre el sistema en el cual se proporcionarán las coordenadas de los puntos.

1.2 Sistemas locales

La geodesia clásica ha resuelto este problema definiendo “sistemas geodésicos locales”, denominación que expresa claramente que su ámbito de aplicación es reducido, no universal.

Un sistema geodésico local queda definido por la elección de un elipsoide de referencia y por un punto origen (datum) donde se establece su ubicación en relación con la forma física de la tierra (geoide). Concretamente, el punto datum es aquél en el que se hace coincidir la vertical del lugar con la normal al elipsoide (desviación de la vertical nula) y generalmente se establece la condición de tangencia entre el elipsoide y el geoide.

El elipsoide así elegido y posicionado, se adapta bien al geoide en las inmediaciones del punto datum (siempre que la elección haya sido criteriosa), pero a medida que nos alejamos crece la probabilidad de que esta adaptación aminore. Por esta razón los sistemas así definidos fueron utilizados por países o grupos de países permitiendo llevar adelante todos los proyectos geodésicos en sus respectivos territorios. Los parámetros que definen un sistema geodésico local son:

• dos de ellos son necesarios para especificar el elipsoide, usualmente el semieje mayor **a** y el achatamiento o aplastamiento **f = (a-b)/a**,

• otros dos sirven para ubicar el punto datum. Son sus coordenadas latitud y longitud, • finalmente, se requiere un acimut de origen en el punto datum a fin de orientar al elipsoide.

Los sistemas geodésicos locales se materializan mediante las redes de triangulación de diversos órdenes, cuyos vértices se denominan puntos trigonométricos. Estas triangulaciones se ejecutan en varias etapas:

• Proyecto de las redes.
• Reconocimiento de vértices
• Materialización (monumentación) de los mismos
• Preparación de mediciones (erección de torres, centración, etc.)
• Ejecución de mediciones angulares, de distancias, y astronómicas
• Cálculo provisorio de coordenadas
• Compensación y asignación de coordenadas definitivas a cada vértice.

El proceso total involucraba la ejecución de numerosas determinaciones astronómicas fundamentales, que sirven para plantear ecuaciones de orientación. Estas estaciones astronómicas se denominan “puntos Laplace”, y las ecuaciones que a partir de ellos se plantean se denominan ecuaciones Laplace.

Entre los problemas que los sistemas geodésicos locales dejan sin resolver podemos destacar dos:

• al encontrarse dos o más redes basadas en diferentes sistemas (ej. en zonas limítrofes) resultan diferencias de coordenadas inaceptables,
• los sistemas locales son únicamente planimétricos, las cotas altimétricas se desarrollan a partir de otros caminos. en otras palabras, no son sistemas tridimensionales.

1.3 Sistemas geocéntricos

Se define como un sistema geocéntrico aquél que especifica una terna de ejes ortogonales cartesianos X, Y, Z centrado en el centro de masas de la tierra. Estos sistemas terrestres (fijados a la Tierra) tienen el eje X solidario al meridiano origen de las longitudes y el eje Z próximo al eje de rotación, por lo tanto este sistema “gira” juntamente con la tierra. Estos sistemas resultan imprescindibles para ubicar puntos ligados al planeta Tierra. A diferencia de los sistemas geodésicos locales, los sistemas geocéntricos son tridimensionales y de alcance global. El concepto

de punto datum desaparece, y es reemplazado por el origen y orientación de la terna de referencia.

Ejemplos de sistemas geocéntricos terrestres son el WGS84 y el ITRF, que se desarrollarán en otras secciones de este trabajo.

1.4 Sistemas de referencia y marcos de referencia

Existe alguna confusión en los conceptos de sistemas y marcos de referencia. Los sistemas de referencia son los estudiados en la sección anterior: se definen a partir de consideraciones matemáticas y físicas e involucran la especificación de parámetros, puntos origen, planos, ejes, etc.

Los marcos de referencia están constituidos por puntos materializados en el terreno y ubicados con gran exactitud y precisión según alguno de los sistemas de referencia. En los sistemas geodésicos locales, el marco de referencia estaba dado por los puntos trigonométricos de distintos órdenes que a través de cadenas y mallas cubren los territorios. En los sistemas geocéntricos, se llevan adelante redes de puntos medidos usualmente con GPS y vinculados en lo posible a puntos de las redes anteriores, siguiendo una serie de precauciones para minimizar los errores sistemáticos y aleatorios que pueden afectar al conjunto.

En la época en que se escriben estas líneas, en el mundo entero se está produciendo una transición de los sistemas locales a los sistemas geocéntricos.

1.5 Bibliografía del capítulo

Bomford G. Geodesy. Clarendon Press, Oxford, 1980 Caputo M. The Gravity Field Of The Earth. Academic Press New York

Defense Mapping Agency. World Geodetic System 1984,Technical Report. December 1987.

Mueller I. Gravimetric And Celestial Geodesy, A Glossary of Terms. Frederick Ungar

Publishing Co.

EL SISTEMA WGS 84
(Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999)

3.1 Introducción

El acrónimo **WGS 84** deviene de **World Geodetic System 1984** (Sistema geodésico mundial 1984). Se trata de un sistema de referencia creado por la Agencia de Mapeo del Departamento de Defensa de los Estados Unidos de América (Defense Mapping Agency -**DMA**) para sustentar la cartografía producida en dicha institución y las operaciones delDepartamento de Defensa (**DoD**). Este sistema geodésico estuvo estrechamente ligado al desarrollo del Sistema de Posicionamiento Global (**GPS**) sirviendo durante mucho tiempo para expresar las posiciones tanto de los puntos terrestres como de los satélites integrantes del segmento espacial (a través de las efemérides transmitidas).

Desde el punto de vista militar, WGS 84 es el sistema oficial aprobado por la Junta de Comandantes en Jefe de los Estados Unidos de América para las operaciones militares en todo el mundo. Casi todo el equipamiento militar actual incluyendo sistemas de navegación y armamentos emplean de algún modo este sistema de referencia mundial.

El **WGS 84** no es sólo un sistema geocéntrico fijado a la tierra (**ECEF**) de ejes **X, Y, Z** sino además un sistema de referencia para la forma de la tierra (elipsoide) y un modelo
gravitacional. El **WGS 84** se ha popularizado por el uso intensivo de **GPS** y se han determinado parámetros de transformación para convertir coordenadas a todos los sistemas geodésicos locales y otros sistemas geocéntricos (ver secciones respectivas).

La **DMA** llegó a la definición de este sistema después de haber ensayado otros tres anteriores: **WGS 60, WGS 66 y WGS 72**, este último a partir del sistema satelitario Transit (Transit Doppler Reference Frame - **NSWC 9Z - 2**) y muy parecido al actual **WGS 84**, al punto que para pasar de uno al otro sólo es necesario un corrimiento del origen de coordenadas de 4.5 metros, una rotación alrededor del eje **Z** de 0.814 segundos de arco y una diferencia de factor de escala de -0.6 ppm.

3.2 Definición

El **WGS 84** es un Sistema Convencional Terrestre (**CTS**) tal que:

• el origen de coordenadas **X Y Z** es el centro de masas de la Tierra,
• el eje **Z** pasa por el polo convencional terrestre (**CTP**) definido por el Bureau Internacional de la Hora (**BIH**) para la época 1984.0,

• el eje **X** es la intersección entre el meridiano origen de longitudes definido por el **BIH** para la época 1984.0 y el plano del ecuador **CTP**,

• el eje **Y** completa con los ejes anteriores una terna derecha de ejes fijos a la Tierra, está en el Ecuador, a 90º al este del eje **X**,

• el origen de la terna así definida sirve además de centro geométrico del elipsoide **WGS 84**, y el eje **Z** es su eje de revolución,

• el semieje mayor (**a**) del elipsoide 1984 mide 6378137 metros,

• el achatamiento (**a-b)/a** siendo **b** el semieje menor, es 1/298.257223563

• otros parámetros, además de los anteriores, son:

constante de gravitación terrestre **GM** = 3986005 x 10^8 m^3 s^{-2} velocidad angular de la tierra **w** = 7292115 x 10^{-11} rad/seg, coeficiente gravitacional de segundo grado normalizado **C20** = - 484.16685 x 10^{-6} velocidad de la luz en el vacío **c** = 299792458 m s^{-1}

3.3 Relación de WGS 84 con sistemas inerciales y con sistemas instantáneos

La relación matemática entre los sistemas geocéntricos **WGS 84** (que es un **CTS**), **CIS** (sistema inercial anteriormente materializado por el Catálogo Fundamental de Estrellas **FK5** para la época J2000.0, actualmente el CIS se materializó con un conjunto de posiciones de radiofuentes lejanas observables con VLBI) e **ITS** (sistema instantáneo) es la siguiente:

CTS = WGS 84 = [A] [B] [C] [D] CIS siendo **ITS = [B] [C] [D] CIS**
donde:

[A]= Matriz de rotación por movimiento de los polos

[B]= Matriz de rotación por movimiento de revolución de la Tierra (tiempo sideral)
[C]= Matriz de rotación por nutación
[D]= Matriz de rotación por precesión

3.4 Relación de WGS 84 con otros sistemas geocéntricos y con sistemas locales

Probablemente ningún sistema geodésico haya sido tan estudiado en relación con todos los demás como el WGS 84. Un ejemplo de esto es la reciente determinación de los parámetros de transformación con el sistema PZ-90, utilizado por la constelación GLONASS que está siendo integrada actualmente al sistema GPS.

Existe un extenso *software* para transformar WGS 84 a cada uno de los sistemas geodésicos locales y geocéntricos, incluyendo los instantáneos ITRF (Ver sección respectiva).

3.5 Actualización del sistema

El sistema WGS 84 se ha ido desactualizado con el correr de los años. La serie de sistemas ITRF, en cambio, se modifican anualmente y han llegado a un orden de precisión muy superior. (ver sección respectiva). Debido a esto, y teniendo en cuenta las mayores demandas del Departamento de Defensa de los Estados Unidos de América, se han producido en los últimos años una serie de refinamientos y mejoras en el sistema, de manera de permitir su uso en las aplicaciones de muy alta precisión.

Este esfuerzo dio por resultado un marco de referencia para el WGS84 que es coincidente con ITRF92 dentro de los 10cm. Este marco de referencia mejorado se conoce como **WGS 84 (G730)**.

El único parámetro afectado por esta mejora fue GM = 3986004.418 x 10^8 m^3 s^{-2}. Comparado con el anterior, resulta una diferencia muy pequeña, dentro del error estándar del parámetro. La mejora no ha tenido ningún efecto sobre el desarrollo de la cartografía. Sin embargo, se estudian otras modificaciones que incluyen nuevas definiciones del geoide, que resultarán en una mayor calidad de cartas y mapas.

3.6 Bibliografía del capítulo 3

Defense Mapping Agency. World Geodetic System 1984, Technical Report. December 1987.
Malys and Slater. Maintenance and Enhancement of the World Geodetic System 1984.
Defense Mapping Agency.
Misra, N., R. I. Abbot and E. M. Gaposchkin. Integrated Use of GPS and Glonass: Transformation Between WGS 84 and PZ-90 P. Lincoln Laboratory, Lexington, Massachusetts Institute of Technology.
Mueller, I. Gravimetric and Celestial Geodesy, A Glossary of Terms. Frederick Ungar
Publishing Co.
Caputo, M.. The Gravity Field of the Earth. Academic Press New York.

EL SISTEMA TERRESTRE INTERNACIONAL
(Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999)

4.1 Introducción

Desde principios del siglo veinte han existido organismos internacionales cuya misión estaba íntimamente relacionada con la rotación de la Tierra, y como consecuencia inevitable, con la definición y materialización de un sistema de referencia terrestre respecto del cual se determina la posición variable del eje de rotación. Así, el International Latitude Service, constituido por cinco estaciones astronómicas ubicadas sobre el paralelo de 39 grados de latitud norte, tenía la responsabilidad de determinar el movimiento del polo de rotación con respecto a la superficie terrestre. Para ello, se definió un polo medio "fijo" a la superficie materializado por las latitudes medias de estas estaciones fundamentales (Origen Convencional Internacional OCI). El advenimiento de nuevos instrumentos astronómicos y el interés de más países en contribuir con sus observaciones dio lugar al nacimiento del International Polar Motion Service que llegó a contar con casi un centenar de estaciones participantes.

El Bureau Internationale de l'Heure, agrupaba también a un importante número de estaciones cuya misión principal era determinar una escala de tiempo uniforme, para lo cual era indispensable definir un origen de las longitudes de las estaciones participantes.

El sistema de ejes materializado por las coordenadas astronómicas medias del conjunto de las estaciones participantes de estos servicios internacionales constituía una referencia adecuada para la medición de la rotación de la Tierra, pero de escasa aplicación práctica para satisfacer otras necesidades.

Estos organismos internacionales a menudo superponían sus responsabilidades. Además, la irrupción de nuevas técnicas para la determinación de la rotación de la Tierra en la década del setenta, consolidadas definitivamente en los ochenta, obligó a una redefinición de responsabilidades.

En este marco se establece el Internacional Earth Rotation Service (IERS) con una estructura compleja que comienza a funcionar a partir de 1988. Las técnicas observacionales que contribuyen a la materialización de sus productos son las siguientes:

• VLBI: medición de radiofuentes extragalácticas por medio de radiotelescopios.
• SLR: medición de distancias láser a satélites específicos desde telescopios especiales.
• LLR: medición de distancias láser a la Luna desde telescopios especiales.
• GPS: medición de distancias a satélites GPS con receptores específicos.
• DORIS: medición de variación de distancias desde satélites específicos a balizas orbitográficas.

Todas ellas aportan diferentes elementos para la solución de distintos problemas, que son combinados por el IERS para la producción de resultados aplicables a distintas disciplinas.

4.2 Los productos del IERS

4.2.1 Referencias terrestres para la geodesia, geodinámica y oceanografía

La definición actual del sistema de referencia terrestre (ITRS) es consistente con la anterior en cuanto procura que el eje polar medio de la Tierra este orientado en la misma dirección que el OCI y el origen de las longitudes sea común con el usado tradicionalmente (próximo al meridiano de Greenwich). Con esta definición, los parámetros de la rotación terrestre que se determinan actualmente están referidos al mismo sistema que los que se observaban desde hace un siglo aproximadamente.

Esta definición permite establecer una terna de ejes tales que el eje Z está dirigido al polo medio, el eje X, sobre el plano ecuatorial (perpendicular a Z) y dirigido al punto origen de las longitudes, y el eje Y sobre el mismo plano y perpendicular a los anteriores de forma tal que formen una terna derecha. El origen de este sistema es el baricentro de la Tierra, incluyendo a la atmósfera y la unidad de longitud es el metro.

La materialización de este sistema es un marco de referencia internacional (ITRF) constituido por un conjunto de coordenadas y velocidades geocéntricas de unas 180 estaciones con precisión de 1 a 3 cm en coordenadas y de 2 a 5 mm/año en velocidades.

El campo de velocidades es tal que la suma de las velocidades horizontales de todos los puntos que lo materializan es nula. Esto hace que, si bien cada punto está animado de una velocidad con respecto a los demás, el conjunto tiene velocidad cero. Lo contrario significaría aceptar que todo el marco de referencia está animado de una velocidad no nula.

4.2.2 Referencias celestes para las ciencias de la Tierra y la astrofísica

El sistema celeste de referencia ha sido definido de manera tal que no se producen discontinuidades con las definiciones tradicionales basadas en la posición del eje de rotación de la Tierra en el espacio, y en la intersección del ecuador y la eclíptica para definir el origen de la coordenada longitudinal. No obstante, su materialización actual es muy diferente de los tradicionales catálogos estelares porque está compuesta por las coordenadas de un conjunto de objetos extragalácticos que por su distancia pueden considerarse realmente fijos en el espacio (ICRF). Estos objetos son observables con radiotelescopios en la modalidad de VLBI (interferometría de base muy larga).

Los sistemas espaciales específicos de cada técnica observacional son vinculados y referidos en última instancia al ICRF.

4.2.3 Rotación terrestre para las ciencias de la Tierra

La observación de objetos exteriores a la Tierra por las distintas técnicas que contribuyen al IERS (radiofuentes extragalácticas, la Luna o los satélites artificiales) permite relacionar los sistemas celestes propios de cada disciplina con las posiciones terrestres de las estaciones de observación. Los parámetros

geométricos que permiten vincular sistemas terrestres y celestes son los que definen la orientación de la Tierra (materializada por las coordenadas terrestres de las estaciones) en el sistema celeste espacial (materializado por las coordenadas de los objetos medidos). Es tarea fundamental del IERS la obtención de una única solución combinada con los datos de toda la técnica tendiente a unificar todos los sistemas individuales.

Los parámetros resultantes permiten conocer el movimiento de la Tierra y sus variaciones que son interpretadas en términos de estructura y propiedades del interior de la Tierra, dinámica de los océanos y la atmósfera, cambios globales, movimientos tectónicos y otros fenómenos geofísicos de gran importancia.

4.3 El sistema ITRF, un nuevo concepto de materialización

La precisión alcanzada en la determinación de coordenadas terrestres obliga a un cambio conceptual: no es posible materializar un sistema terrestre en base a coordenadas fijas, porque a nivel de la precisión centimétrica, ninguna estación ubicada sobre la superficie terrestre puede considerarse fija, todas están animadas de movimientos principalmente debidos a movimientos de las placas tectónicas en las que están asentadas.

En consecuencia, el ITRF está constituido por un conjunto de coordenadas y velocidades de las estaciones que lo materializan. Su continua evolución permite agregar nuevas estaciones cada año y mejorar la precisión general del conjunto. Por esa razón, cada nueva realización lleva indicado el año de su determinación, como también, la época fundamental a la cual se refieren las coordenadas listadas (p. ej. ITRF 93, ó ITRF 94, época 1993.0). Esto quiere decir que ITRF 93 difiere de ITRF 94 porque se ha agregado más información para calcular este último, lo que se traduce en pequeñas variaciones de posiciones y velocidades.

En su conjunto, estas diferencias permiten encontrar parámetros de transformación entre las distintas materializaciones del sistema terrestre internacional. Cabe mencionar que en la actualidad, estas transformaciones están en niveles milimétricos y por el momento no tienen importancia práctica para aplicaciones geodésicas convencionales.

Mucho más importante puede ser el efecto de las velocidades, no obstante, es importante no perder la dimensión del problema: este efecto debe ser considerado cuando se trabaja en redes regionales que involucran distintas placas tectónicas y,

de manera especial, cuando se utilizan distintas estaciones con coordenadas ITRF definidas en una época original.

4.4 Discusión del nuevo concepto, un ejemplo

Supóngase que se realiza la medición de una red nacional de muy alta precisión con una época promedio de observación en 1997.5. Se decide procesar el material observacional local junto con las observaciones de un número apropiado de estaciones permanentes GPS distribuidas en todo el mundo. Se toman sus coordenadas y velocidades de ITRF 94 (por ejemplo), por lo que constituyen el marco de referencia gracias al cual la red nacional resulta también expresada en ITRF 94.

Cada estación que materializa al sistema tiene sus coordenadas fijas para una época determinada (por ejemplo, 1993.0):

X0 Y0 Z0 ITRF 94 época: 1993.0

dX/dt dY/dt dZ/dt ITRF 94 época: 1993.0

y se acompañan las componentes de la velocidad (d/dt) para la misma época. Cuando se utilizan las observaciones de esas estaciones de referencia en un momento posterior, por ejemplo 1997.5, se deben utilizar las coordenadas del momento:

$$X = X0 + (1997.5-1993.0).dX/dt$$
$$Y = Y0 + (1997.5-1993.0).dY/dt$$
$$Z = Z0 + (1997.5-1993.0).dZ/dt$$

Las coordenadas que se obtienen están en el mismo sistema ITRF 94, pero en la época 1997.5. La red nacional procesada en este marco resultaría expresada en ITRF 94, época 1997.5.

4.5 Bibliografía del capítulo 5

Altamimi, Z. Combinaison de techniques spatiales pour la determination et la maintenance d'un systeme de reference terrestre centimetrique, tesis doctoral. Observatorio de París, 1990.
IERS. Annual Report.

Moirano, J. y C. Brunini. Los Sistemas de Referencia Modernos, informe técnico. Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata, 1997.

6.3.1 El sistema SIRGAS
(Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999)

El proyecto SIRGAS, Sistema de Referencia Geocéntrico para América del Sur, fue establecido en octubre de 1993 durante la Conferencia Internacional para la Definición del Datum Geocéntrico Sudamericano, en Asunción, Paraguay. Cuenta con los auspicios de la Asociación Internacional de Geodesia, el Instituto Panamericano de Geografía e Historia y la Agencia Nacional de Imágenes y Cartografía de los Estados Unidos de América.

Las mediciones GPS fueron realizadas en mayo/junio de 1995, a lo largo de 10 días consecutivos en un verdadero ejemplo de trabajo cooperativo en el que participaron coordinadamente cientos de personas y decenas de instituciones de todos los países que integran el proyecto.

Los cálculos fueron realizados independientemente por el Instituto de Investigaciones Geodésicas de Alemania y la Agencia Nacional de Imágenes y Cartografía de los Estados Unidos de América.

Los errores en las coordenadas geocéntricas de los puntos SIRGAS son del orden de 1 centímetro. El sistema de referencia elegido para la solución definitiva fue el ITRF 94 y la época de las coordenadas, se hizo coincidir con la época media de observación, es decir, 1995.4. La red está compuesta por 57 puntos, 10 de los cuales se encuentran en la Argentina.

El proyecto SIRGAS difundió también los procedimientos que los países deberán seguir para obtener redes geodésicas GPS con la más alta precisión y compatibilidad. Esto último implica que todas las redes nacionales queden establecidas en el mismo sistema de referencia y época.

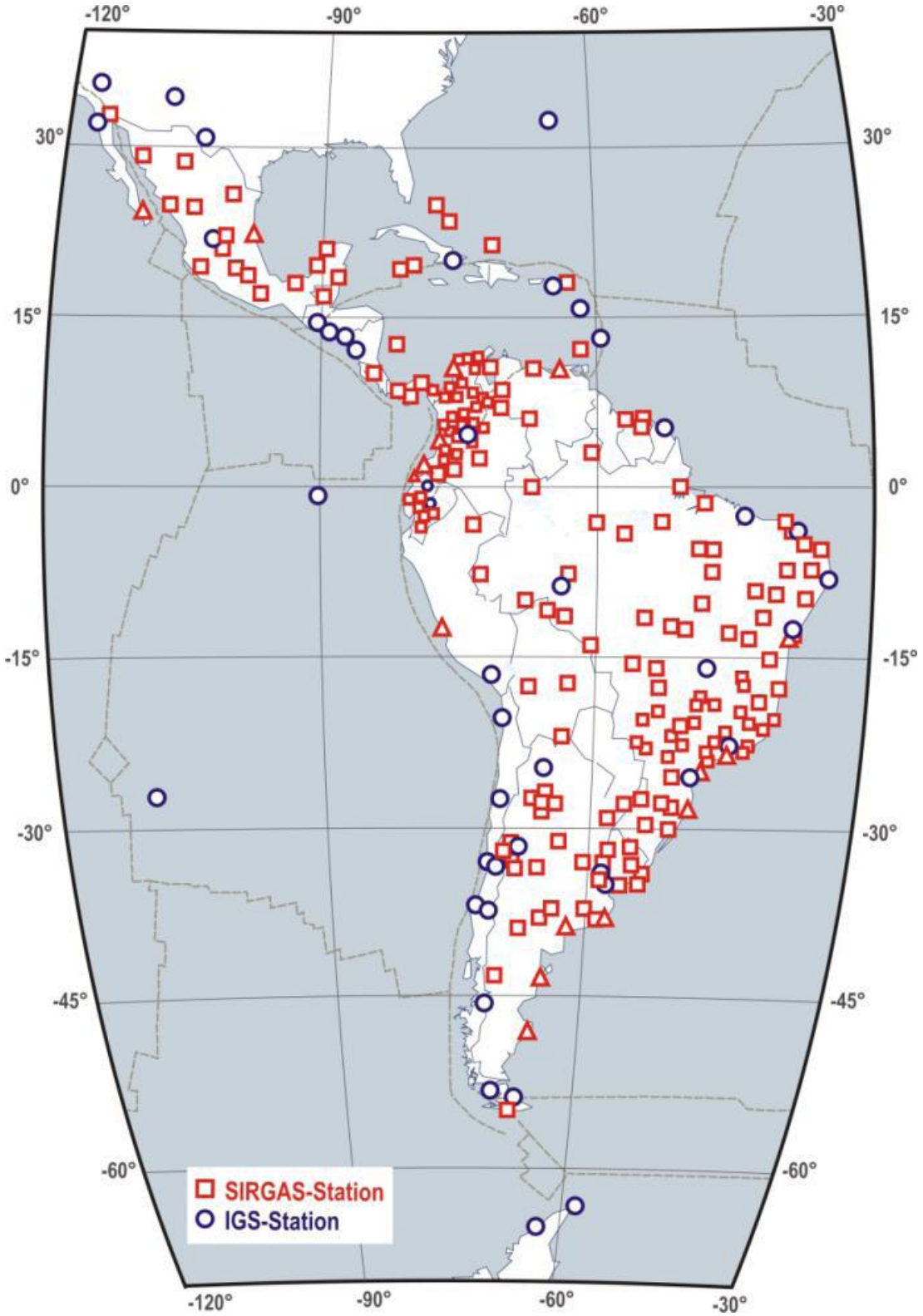
Objetivos:
o Definir y mantener un Sistema Geocéntrico para el Continente.
o Definir y establecer un Datum Geocéntrico.

o Definir y establecer un Datum Vertical unificado.
- Dos realizaciones: SIRGAS 95 ; SIRGAS 2000
- Coordenadas definitivas sobre ITRF 2005

Análisis del Marco de Referencia SIRGAS
(Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999Reporte 2010-2011 Octubre de 2011- Boletín Informativo No. 16)

SIRGAS es la densificación regional del ITRF en América Latina y El Caribe [14]. De manera análoga, las redes nacionales de referencia integradas en SIRGAS son densificaciones locales del marco continental y por tanto, proporcionan el vínculo directo al ITRF. En la actualidad, SIRGAS está materializado por una red de estaciones de operación continua (SIRGAS-CON), que permite el seguimiento permanente del marco de referencia y ha ido reemplazando las redes GPS continentales establecidas inicialmente en 1995 (SIRGA95) y 2000 (SIRGAS2000). La principal ventaja de SIRGAS-CON es que sus coordenadas se determinan semana a semana con respecto al ITRF, posibilitando la detección inmediata de cambios o deformaciones del marco de referencia y aumentando la precisión de las coordenadas de referencia a ser utilizadas en la determinación de datos espaciales en Latinoamérica y El Caribe. La red SIRGAS-CON está compuesta por más de 240 estaciones, de las cuales 48 pertenecen la red global del IGS y las restantes materializan los marcos de referencia nacionales

La estrategia de procesamiento de la red SIRGAS-CON se basa en el cálculo individual de subredes de estaciones siguiendo las especificaciones SIRGAS, las cuales a su vez, están definidas en concordancia con los estándares del IGS (*International GNSS Service*, www.igs.org) y del IERS (*International Earth Rotation and Reference Systems Service*, www.iers.org). Estas subredes son calculadas semana a semana por los Centros de Procesamiento SIRGAS (Tabla 2), quienes reportan soluciones semanales semi libres para que posteriormente sean combinadas entre sí por los Centros de Combinación. De esta manera se generan coordenadas semanales consistentes para la totalidad de las estaciones SIRGASCON. La distribución de las estaciones entre los Centros de Procesamiento garantiza que cada una de ellas esté incluida en por lo menos tres soluciones individuales



Red SIRGAS-CON (status agosto 2011).

Datum Sudamericano de 1969 (SAD- 69)

(The Basic Framwork of The south American Datum of 1969, Irene Fischer DMA, 1973)

El propósito de tener un Datum Sudamericano fue acordado en reuniones de consulta en el Instituto Panamericano de Historia y Geografía y cuya utilidad se veía como necesaria en los siguientes aspectos:

a) Disponer de un datum uniforme para todos los trabajos geodésicos del continente Sudamericano que sirviera de control para los trabajos de ingeniería que se realizaran.

b) Efectuar todos los trabajos de cartografía del continente referidos a un mismo datum

El SAD-69 se obtuvo mediante el método de disponer de un adecuado número de estaciones astronómicas bien distribuidas geográficamente, vinculadas a una malla de geodésica de precisión. La determinación de la ubicación de este datum corresponde a las especificaciones requeridas para su materialización y que son: ser un punto datum ubicado aproximadamente al centro de Sudamérica, además, de ser un área de baja perturbación y de altura geoidal prácticamente cero.

Las características ya mencionadas fueron obtenidas por medio del control de las alturas geoidales en los vértices de un gran triangulo, el cual incluyó la propuesta original de tener un datum gravimétrico en la zona, los vértices de este gran triangulo son: Campo inchauspe, en la Argentina, Chua en Brasil y San Lorenzo en Bolivia.

Los dos primeros vértices poseen alturas geoidales cercanas a cero, lo cual permitiría mantener las alturas geoidales pequeñas para toda la parte este del continente. San Lorenzo, tiene cerca de 20 metros, luego podría mantener las alturas geoidales aún en las altas zonas montañosas de Bolivia cercana a los 50 metros.

La distribución geográfica de los trabajos geodésicos existentes, sugirieron una subdivisión natural en dos grandes arcos: **El Arco Sur**, consistente en una subdivisión este desde Chua a través del sur de Brasil, Paraguay, Uruguay y argentina hasta el límite con Chile y una subdivisión oeste desde Chua a través del oeste de Brasil, Bolivia hasta Chile.

Después que la malla de Bolivia había sido ajustada a este gran Arco del Sur, las estaciones en el límite con Perú fueron utilizadas como puntos de partida para el **Arco del Norte**. El arco Norte continuó a través del Ecuador y el arco este de las montañas colombianas hasta Venezuela. Todo Colombia fue ajustada en su arco este. Colombia también se ajustó independientemente en el datum geodésico de Bogotá.

La sección este se extendió desde Chua al norte y contiene varios ajustes de arcos adicionales, entre ellos se pueden mencionar la malla HIRAN entre el este de Brasil y Venezuela.

La realización del proyecto del Datum Sudamericano implicó principalmente dos aspectos fundamentales:

a) El establecimiento de un buen sistema geodésico fijo como datum de Referencia
b) El ajuste de un control geodésico coherente con el datum.

Elipsoide Sudamericano de 1969

Semi Eje mayor (a) = 6.378.160 m.

Semi Eje menor (b) = 6.356.772,719 m.

Excentricidad al cuadrado (e^2) = 0,006694541916

Achatamiento (f) = 1/298,25

Coordenadas del datum Sudamericano CHUA

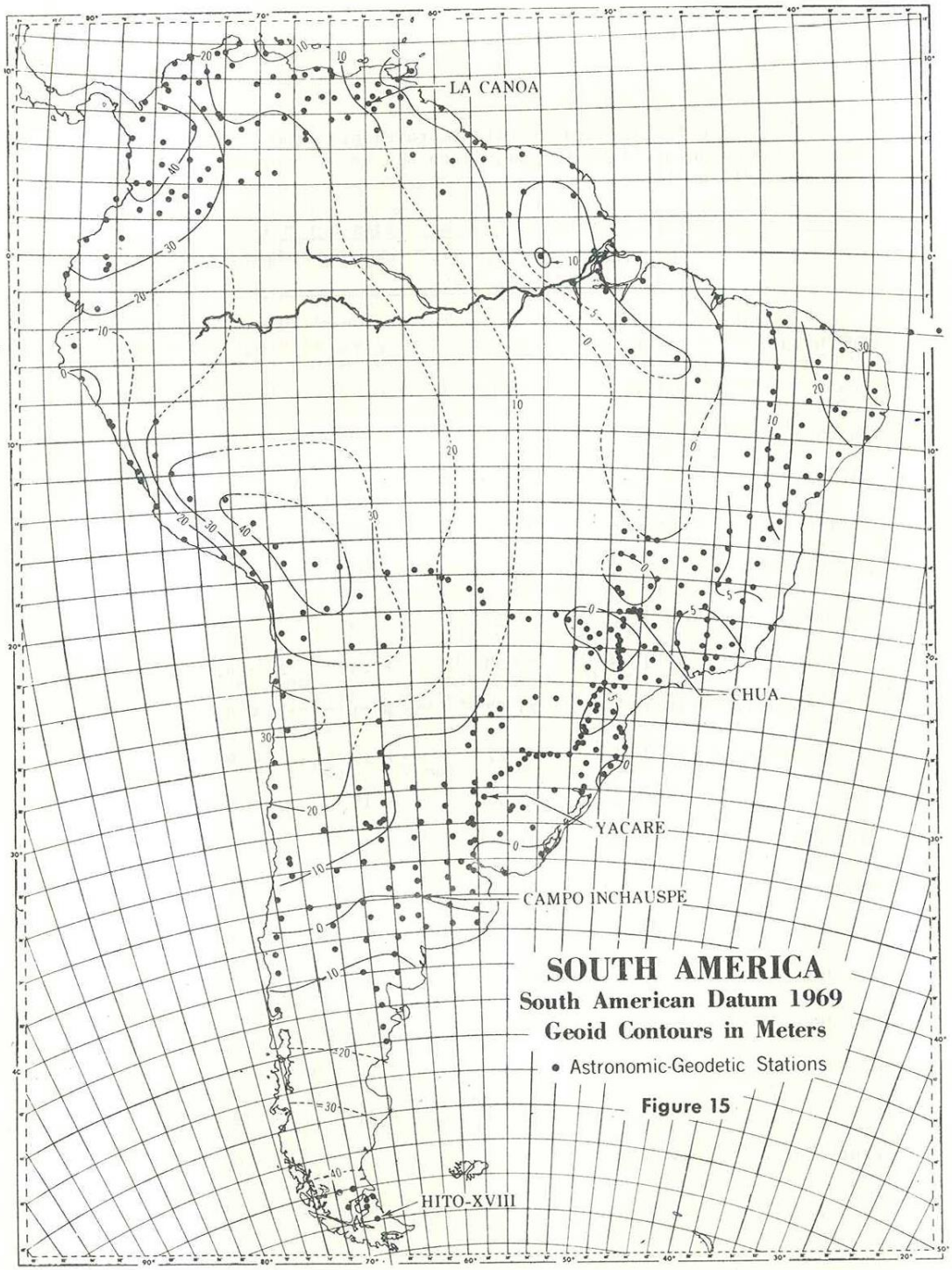
	Astronómica	Geodésica
Latitud	- 19° 45’ 41”,34 +/- 0”,05	- 19° 45’ 41”,6527
Longitud	-48° 06’ 07",80 +/- 0”,08	- 48° 06’ 04”,0639
Acimut a Uberaba	271° 30’ 05”,42	271° 30’ 04”,05
Altura Geoidal	Cero metros	

Puntos trigonométricos referido a diferentes Datum

Punto	datum	Latitud	Longitud
O.N.	PSAD-56	-21° 17’ 53”,64	- 68° 10’ 38”,555
	SAD-69	-21° 18’ 05”,068	- 68° 10’ 42”,758
	Extremo Oeste Base Ollague	-21° 18’ 05”,068	-68° 10’ 46”,21
C.H.E	PSAD-56	-23° 06’ 49”,645	-68° 15’ 24”,328
	SAD-69	-23° 02’ 31”,178	-68° 07’ 32”,450
	Extremo Oeste Base Ollague	-23° 02’ 33”,43	-68° 07’ 36”,07

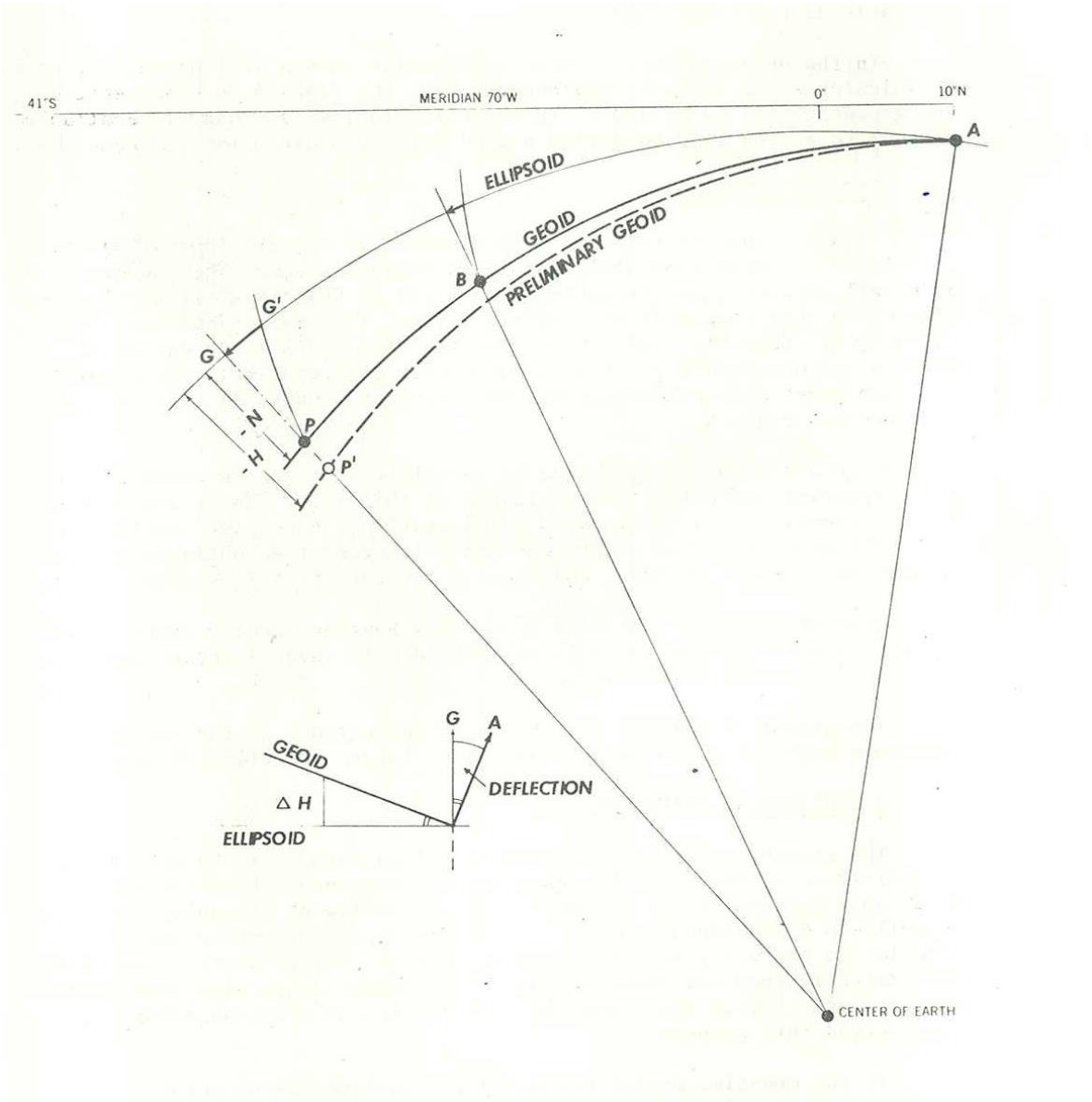
Latitud	Datum	Ondulación
-20°	PSAD-56	-120 metros
-30°	PSAD-56	-200 metros
-40°	PSAD-56	-280 metros
-41	PSAD-56	-327 metros
-20°	SAD-69	+ 30 metros
-30°	SAD-69	+ 20 metros
-40°	SAD-69	-10 metros
-41	SAD-69	-15 metros

Fuente: The Geoid in South America, Irene Fischer, 1970

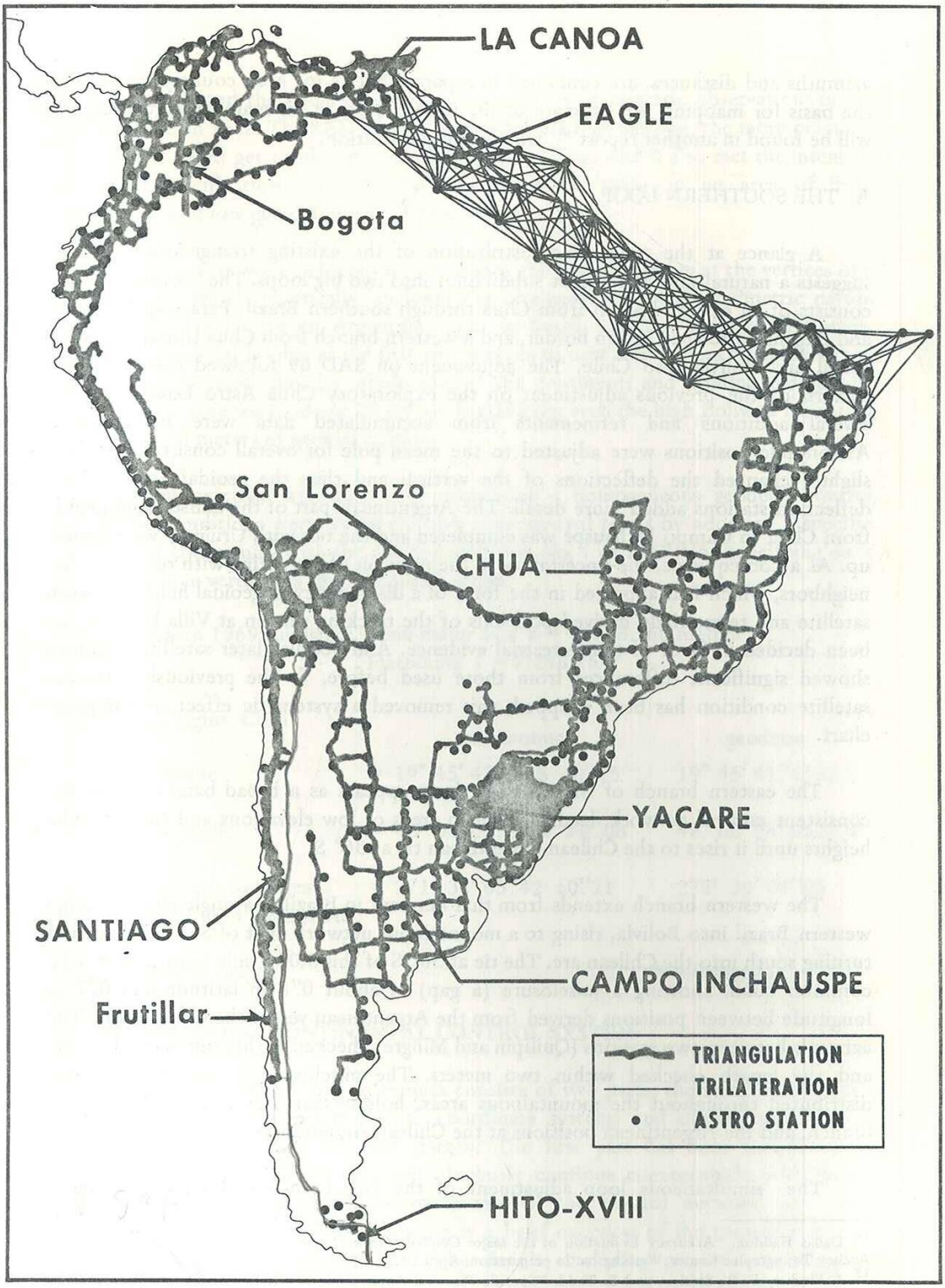


— 35 —

Fuente: The Geoid in South America, Irene Fischer, 1970



Fuente: The Geoid in South America, Irene Fischer, 1970



Fuente: The basic framework of South American datum of 1969, Irene Fischer 1973

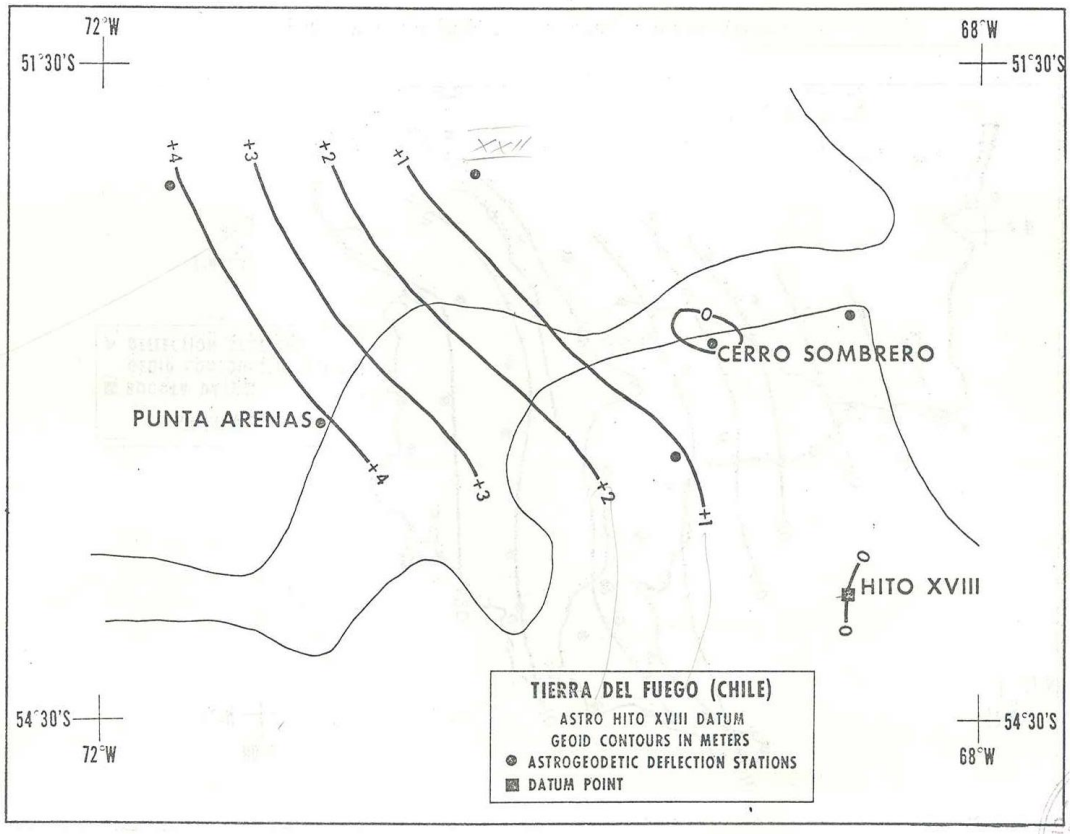


Figure 5. Tentative geoid chart for southern Chile on Hito XVIII Datum (Tierra del Fuego, Chile)

Fuente: The basic framework of South American datum of 1969, Irene Fischer 1973

COORDENADAS GEODESICAS

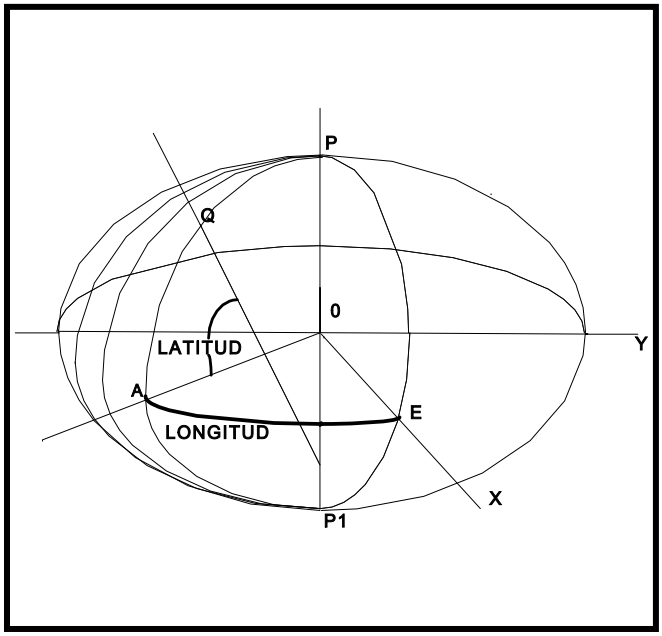
Consideremos el Elipsoide cuyo centro está en 0. El eje 0z es el eje rotacional, el eje 0x se encuentra en el plano ecuatorial e intercepta al meridiano PEP1 que se define como el meridiano principal, desde el cual se toman las longitudes. El eje OY se encuentra en el plano ecuatorial.

LONGITUD:

La longitud geodésica de un punto se define como el ángulo diedro entre los planos del meridiano primario y un meridiano cualquiera, en la figura 11 la longitud queda definida por el ángulo comprendido por EOA, considerando que el meridiano PE es el meridiano origen de las coordenadas. Desde este meridiano origen las longitudes son negativas si el ángulo se extiende al oeste de este meridiano cero, caso contrario si el ángulo se extiende al este del meridiano origen.

LATITUD:

La latitud geodésica de un punto ubicado sobre la superficie del elipsoide, se define como el ángulo entre la normal al elipsoide en el punto y el plano ecuatorial. En la figura 3, la Latitud queda definida por el ángulo comprendido por QOA . El plano ecuatorial es el origen de las latitudes, en el hemisferio norte las latitudes se consideraran positivas al aumentar la graduación desde el plano ecuatorial hacia el polo norte. En el hemisferio sur, las latitudes serán negativas, considerándose desde el Plano ecuatorial hacia el polo sur.



EXCESO ESFERICO

El exceso esférico en un triángulo se define como la diferencia angular existente entre la suma de los tres ángulos de un triángulo menos 180º, esta diferencia se produce debido a la esfericidad de la tierra, situación que provoca que en un triángulo sobre ella la suma de sus tres ángulos excedan en una cierta cantidad a los 180º que es la suma de los ángulos internos en un triángulo plano.

La solución de los triángulos esféricos se hace más fácil si se adopta el teorema de LEGENDRE que expresa lo siguiente:

" *Si los lados de un triángulo plano y rectilinio son iguales a los lados correspondientes de un triángulo esférico, luego los ángulos del triángulo plano serán iguales a los ángulos correspondientes del triángulo esférico menos un tercio del* ***exceso esférico*** *"*.

Si consideramos un triángulo esférico, en una esfera de radio R, y al triángulo plano correspondiente, como se señala en la figura:

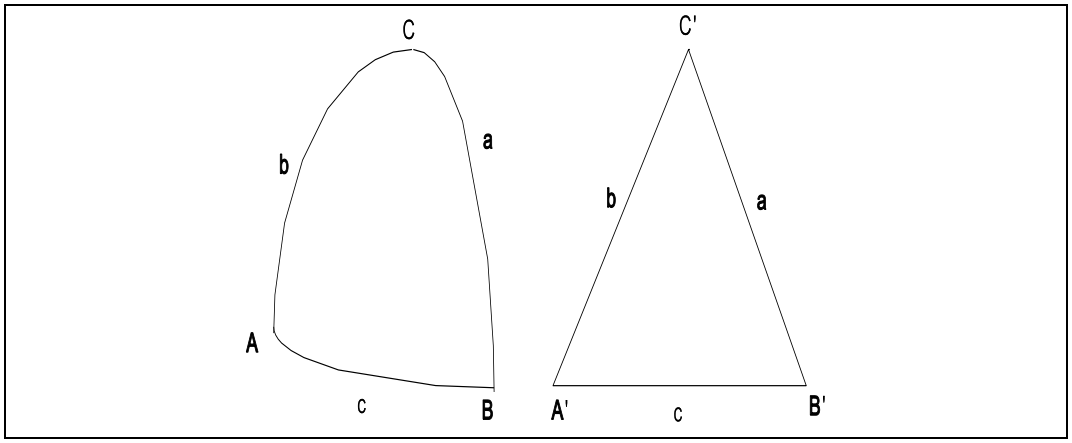


Figura 9

Se utilizarán estos triángulos para encontrar la diferencia que existe entre el ángulo en una esfera y el ángulo en un plano, en este caso será la diferencia existente entre: A-A' , B-B' , C-C' :

A' + B' + C' =180º : Triangulo plano

A' + (1/3 E) + B' + (1/3 E) + C' + (1/3 E) = 180º + E : Triangulo esférico

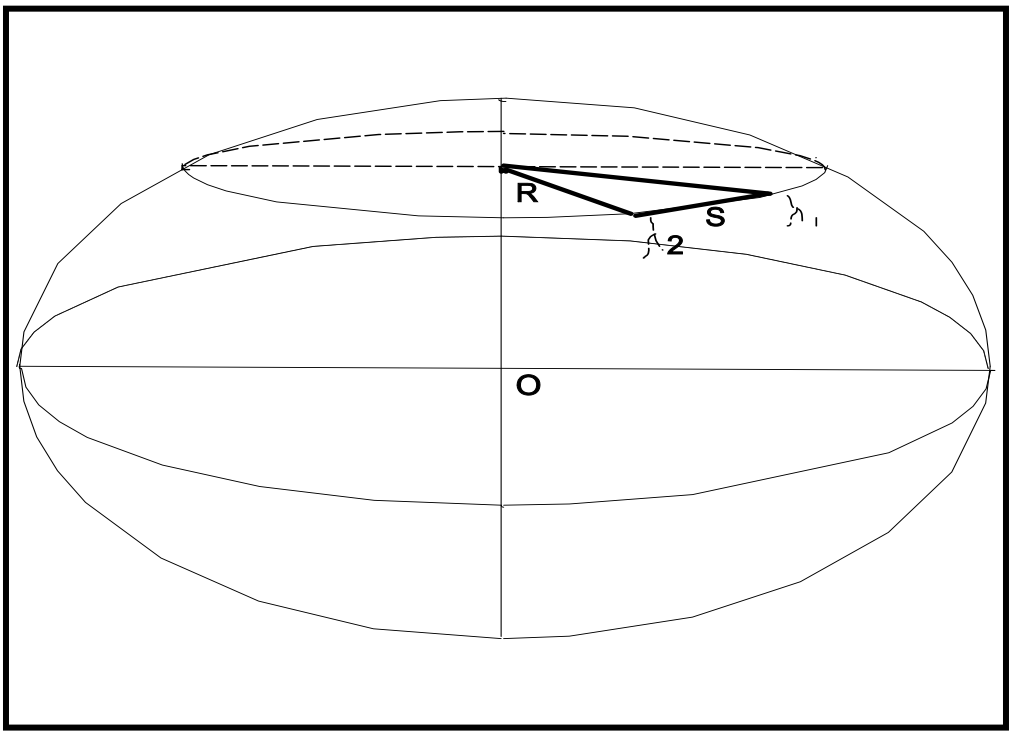
A + B + C = 180 º : Triangulo esférico

Para el cálculo del exceso esférico de una figura cualquiera, el exceso esférico se calcula de la forma siguiente:

E" = Superficie de la figura/(N* ρ*Arco 1")

CALCULO DE ARCOS DE PARALELOS Y MERIDIANOS EN EL ELIPSOIDE

LONGITUD DE UN ARCO DE PARALELO



$S = R\,\Delta\lambda$ arc 1"

R es el radio del paralelo, corresponde a la coordenada X de la elipse

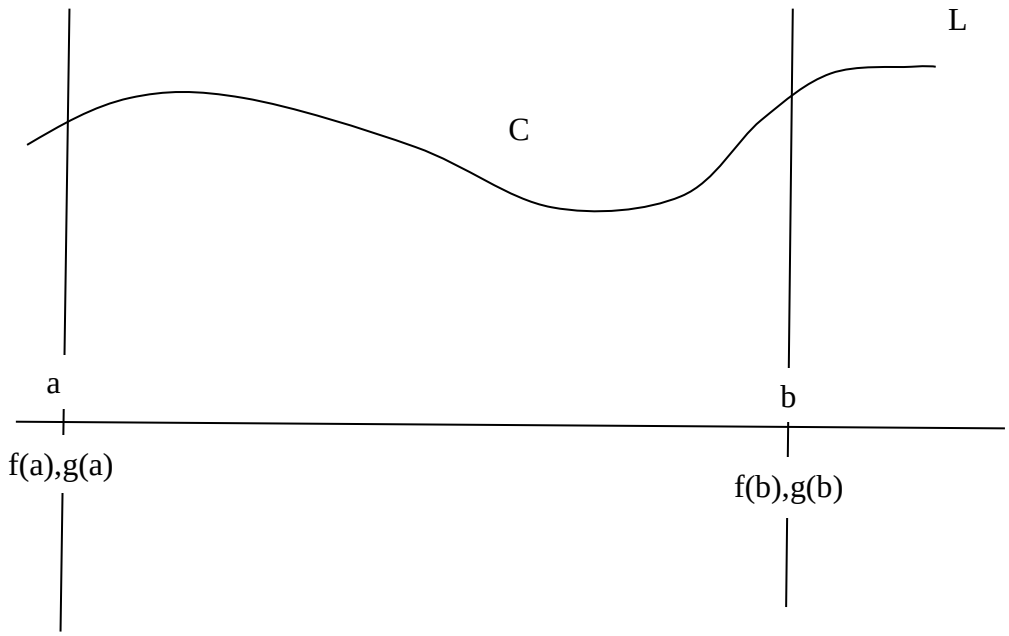
$\Delta\lambda$ la dirección de longitud ($\lambda_2 - \lambda_1$)

sustituyendo R por su valor X , tendremos :

$S = (a\cos\varphi\,\Delta\lambda \text{ arc } 1'')/((1-e^2\operatorname{Sen}^2\varphi))^{0.5}$

$$\boxed{S = N\,\Delta\lambda\cos\varphi \text{ arc } 1''}$$

LONGITUD DE UN ARCO DE MERIDIANO



TEOREMA:

Hagamos que la curva C tenga las ecuaciones paramétricas x=f(t) y g(t) y supongamos que f' y g' son continuas en el intervalo cerrado [a,b]. Entonces la longitud del arco L unidades de la curva C, desde el punto [f(a),g(a)] hasta el punto [f(b), g(b)] está determinado por :

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt}$$

M = radio de un círculo cuyo arco es **dl**

dl = M*dφ

Si $X = \dfrac{a\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{1/2}}$; y $Y = \dfrac{a(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{1/2}}$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a(1-e^2)sen\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}} \; ; \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{-a(1-e^2)sen\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}\right)^2} * d\varphi$$

$$dL = \sqrt{\frac{a^2(1-e^2)^2 sen^2\varphi + a^2(1-e^2)\cos^2\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^3}} * d\varphi$$

$$dL = \sqrt{\frac{a^2(1-e^2)(sen^2\varphi + \cos^2\varphi)}{(1-e^2 sen^2\varphi)^3}} * d\varphi$$

$$dL = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}} * d\varphi$$

$$\boxed{L = \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}} * d\varphi}$$

$$L = a(1-e^2) * \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} (1-e^2 sen^2\varphi)^{-3/2} d\varphi$$

$(1 + X)^{-n}$; binomio de Newton cuando $X^2 < 1$

$$\boxed{(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} - \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)x^4}{4!} - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)x^5}{5!} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)x^6}{6!} - \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$sen^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$

$$sen^4\varphi = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$$

$$sen^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi - \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$

$$sen^8\varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2\varphi + \frac{7}{32}\cos 4\varphi - \frac{1}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi$$

$$sen^{10}\varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256}\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi - \frac{45}{512}\cos 6\varphi + \frac{5}{256}\cos 8\varphi - \frac{1}{512}\cos 10\varphi$$

$$sen^{12}\varphi = \frac{231}{1024} - \frac{99}{256}\cos 2\varphi + \frac{495}{2048}\cos 4\varphi - \frac{55}{512}\cos 6\varphi + \frac{33}{1024}\cos 8\varphi - \frac{3}{512}\cos 10\varphi + \frac{1}{2048}\cos 12\varphi$$

$$(1+(-e^2 sen^2\varphi))^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}(-e^2 sen^2\varphi) + \frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}e^4 sen^4\varphi}{1*2} - \frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}*\frac{7}{2}e^6 sen^6\varphi}{1*2*3} + \frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}*\frac{7}{2}*\frac{9}{2}e^8 sen^8\varphi}{1*2*3*4} - \frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}*\frac{7}{2}*\frac{9}{2}*\frac{11}{2}e^{10} sen^{10}}{5!} + \frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}*\frac{7}{2}*\frac{9}{2}*\frac{11}{2}*\frac{13}{2}e^{12} sen^{12}}{6!} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1+(-e^2 sen^2\varphi))^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 sen^2\varphi + \frac{15}{18}e^4 sen^4\varphi + \frac{35}{16}e^6 sen^6\varphi + \frac{315}{128}e^8 sen^8\varphi + \frac{693}{256}e^{10} sen^{10}\varphi + \frac{3003}{1024}e^{12} sen^{12}\varphi + \ldots\ldots$$

$$L = a(1-e^2)*\int_{\varphi 1}^{\varphi 2}\left(1+\frac{3}{2}e^2 sen^2\varphi+\frac{15}{18}e^4 sen^4\varphi+\frac{35}{16}e^6 sen^6\varphi+\frac{315}{128}e^8 sen^8\varphi+\frac{693}{256}e^{10} sen^{10}\varphi+\frac{3003}{1024}e^{12} sen^{12}\varphi+..\right)d\varphi$$

Si consideramos el seno de la latitud a la potencia de 10, tendremos:

$$L = a(1-e^2)\left[\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} d\varphi+\frac{3}{2}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^2 sen^2\varphi * d\varphi+\frac{15}{18}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^4 sen^4\varphi * d\varphi+\frac{35}{16}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^6 sen^6\varphi * d\varphi+\frac{315}{128}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^8 sen^8\varphi * d\varphi+\frac{693}{256}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^{10} sen^{10}\varphi * d\varphi\right]$$

$L=\alpha*\varphi - \beta*sen2\varphi + \gamma*sen4\varphi - \delta*sen6\varphi + \varepsilon*sen8\varphi - \xi*sen10\varphi +$……

$\alpha=A*a(1-e^2)/(180/\pi)$;$\beta=B*a(1-e^2)/2$

$\gamma=C*a(1-e^2)/4$; $\delta=D*a(1-e^2)/6$

$\varepsilon=E*a(1-e^2)/8$; $\xi=F*a(1-e^2)/10$

$A =1+(3/4)e^2+(45/64)e^4 + (175/256)e^6 +(11025/16384) e^8 +(43659/65336)e^{10}$

$B = (3/4)e^2+(15/16)e^4+(525/512)e^6+(2205/2048)e^8 + (72765/65536)e^{10}$

$C = (15/64)e^4+(105/256)e^6+(2205/4096)e^8 + (10395/16384)e^{10}$

$D = (35/512)e^6 +(315/2048)e^8 + (31185/131072)e^{10}$

$E = (315/16384)e^8 + (3465/65536)e^{10}$

$F = (693/131072)e^{10}$

Solución calculada en función de los parámetros del Elipsoide Internacional de 1924.

M = 111.136,536656 φ - 16.107,03467 sin2φ + 16,97621083 sin 4φ -0,022265934 sin 6φ + 3,167414495 E-05 sin 8φ - 4,599533 E-08 sin 10φ +……

POSICIONES GEODESICAS

Una de las finalidades principales de la geodesia es el cálculo de las coordenadas geodésicas de puntos sobre el elipsoide. Estas coordenadas se denominan Latitud y Longitud y están siempre referidas a un sistema geodésico pre-determinado.

Si partimos de un punto que tiene coordenadas geodésicas y lo denominamos como punto de partida, y deseamos darle coordenadas a un nuevo punto sobre el elipsoide, como también calcular el azimut desde el nuevo punto al punto inicial, necesitaremos disponer de los siguientes datos; una distancia y el azimut geodésico correspondiente. Esto se denomina "El Problema Directo".

Cuando se dispone de las coordenadas geodésicas de dos puntos, referidos a un mismo sistema geodésico, podemos determinar mediante un proceso de cálculo la siguiente información; la distancia geodésica que existe entre ambos puntos, así como el azimut de la línea. Esto en geodesia se denomina " El problema Inverso ".

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DIRECTO

$\varphi 2 = f1\ (_1, \lambda 1, A12, S)$

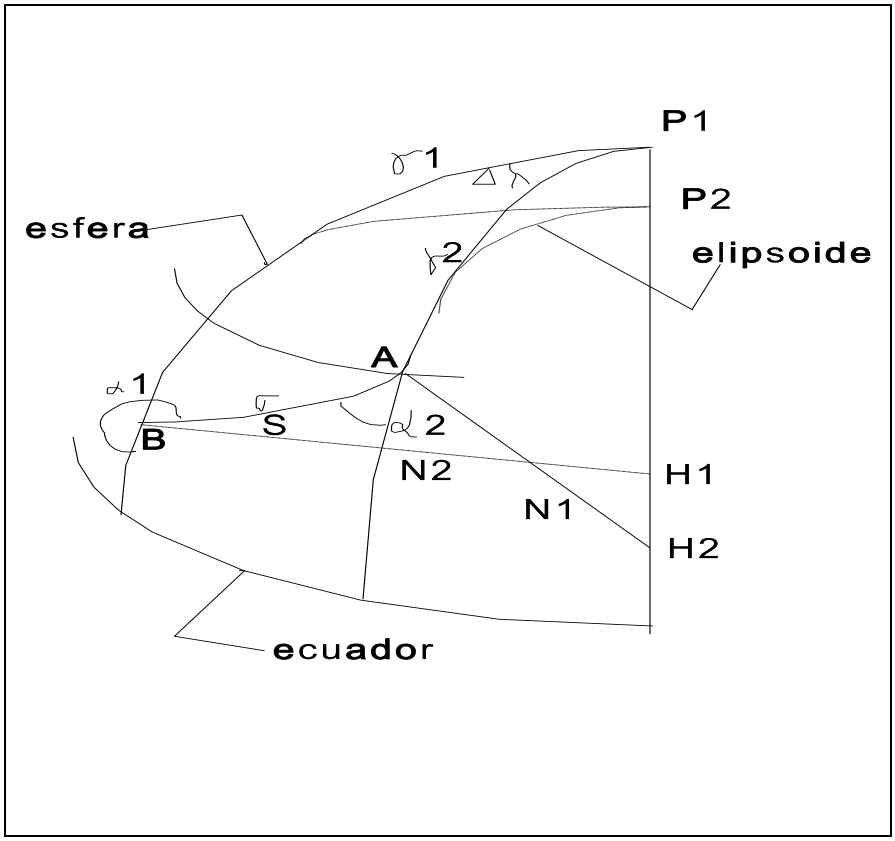
$\lambda 2 = f2\ (_1, \lambda 1, A12, S)$

$A12 = f3\ (_1, \lambda 1, A12, S)$

Las ecuaciones a utilizarse corresponden a las fórmulas de Puissant, las cuales ha quedado demostrado son útiles para líneas geodésicas de hasta 80-100 Km. después de estas distancias comienzan a perder validez rápidamente.

Calculo de Latitud

Asumiendo que la Latitud y Longitud de una estación A son conocidas como también la distancia y acimut hacia una estación B, resolveremos este problema en base al cálculo de diferencia de Latitud entre los dos puntos:



Fórmulas de Puissant para el cálculo de la diferencia de latitud y longitud de un punto. Precisión de 1 PPM en distancias de 80 a 100 kms.

$$-\Delta\varphi = \frac{S\cos\alpha}{\rho m * arc1''} + \frac{S^2 * sen^2\alpha * \tan\ \varphi m}{2 * N1 * \rho m * arc1''} - \frac{S^3 * sen^2\alpha * \cos\alpha * (1 + 3 * \tan^2\varphi m)}{6 * N1^2 * \rho m * arc1''}$$

Como al comienzo del cálculo no conocemos $\varphi 2$, luego no podemos calcular ρ_m (ρ medio), se tendrá que calcular $\Delta\varphi$ con la latitud de $\varphi 1$ y determinar un primer $\Delta\varphi$con esto se calculará un $\varphi 2$ provisorio.

Con este $\varphi 2$ preliminar podremos obtener un ρ_m , el que nos permitirá poder volver a recalcular $\varphi 2$. Este procedimiento se vuelve a reiterar hasta exista una convergencia en el valor de $\varphi 2$ calculado, quedando este $\varphi 2$ como valor final de la latitud del punto (se debe proceder a efectuar la iteración en el cálculo de $\varphi 2$ las veces que sea necesario, hasta que se produzca la convergencia buscada).

$$\varphi 2 = \varphi 1 + \Delta\varphi$$

Cálculo de Longitud

Calculada la Latitud del nuevo punto, se debe ahora calcular su longitud, para el proceso de cálculo será necesario utilizar la latitud del punto nuevo($\varphi 2$), para obtener el valor del Radio de Curvatura Principal o Gran Normal (N2) y para tener el valor de la secante de la nueva latitud.

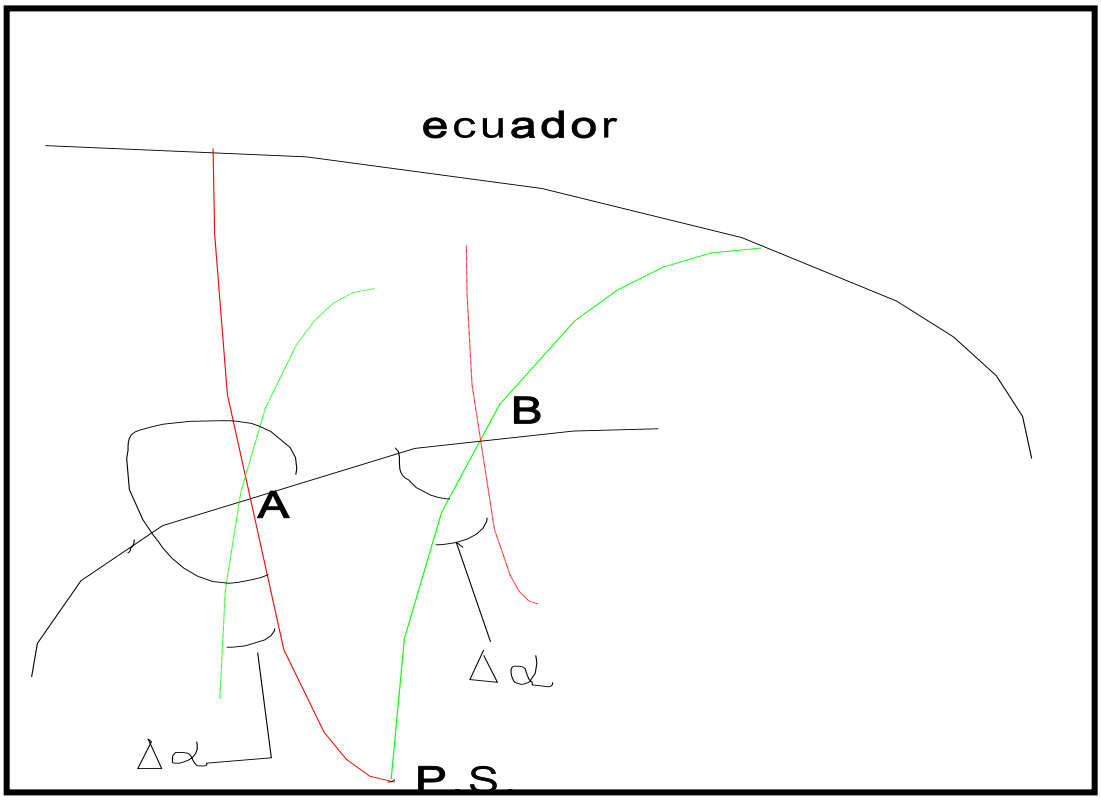
$-\Delta\lambda = (S \operatorname{sen}\alpha \sec\varphi 2)/(N2 \text{ arc}1'')$

Con este valor ya determinado de la latitud ($\varphi 2$) del punto P2, se debe calcular la diferencia de longitud ($\Delta\lambda$) entre ambos puntos .

$$\lambda 2 = \lambda 1 + \Delta\lambda$$

Convergencia

Debido a la convergencia de los meridianos en el Polo, el acimut directo e inverso de una línea no difiere exactamente en 180º, sino que además en una diferencia angular que se denomina convergencia ($\Delta\alpha$).



$$\Delta\alpha = (\Delta\lambda \operatorname{sen}\varphi_m)/(\cos\Delta\varphi/2) + (1/12)\,(\Delta\lambda'')^3 \operatorname{sen}\varphi_m \cos^2\varphi_m\,(\text{arc}1'')^2$$

PROBLEMA INVERSO

Conocidas las posiciones geodésicas de dos puntos M1 y M2, se puede calcular el acimut inverso de la línea y la distancia geodésica, para esta solución tendremos:

$$S*\operatorname{sen}(\alpha_{12} + \Delta\alpha/2) = \Delta\lambda''*N_m*\cos\varphi_m*\text{arc}1''*[1-\Delta\lambda^2/24 + \Delta\lambda^4/1920]$$

$$S*\cos(\alpha_{12} +\Delta\alpha/2)=\Delta\varphi''*\rho_m*\cos(\Delta\lambda/2)*arc1''*[1-\rho^2_m\Delta\varphi^2/(24N^2_m)+\rho^4m\Delta\varphi^4/(1920*N^4_m]$$

N_m, ρ_m ; son radios de curvatura referidos a la latitud media de la línea.

$$\mathbf{Tg.(\alpha+\Delta\alpha/2) = \frac{\Delta\lambda'' N_m arc1'' \cos\varphi_m\,[1-(1/24)[(\Delta\lambda * \text{arco de } 1'')^2]}{\Delta\varphi'' \rho_m arc1'' \cos(\Delta\lambda/2)[1-(\rho_m^2/(24N^2_m))*[(\Delta\varphi * \text{arco de } 1'')^2]}}$$

Se elimina los términos terceros de los paréntesis, por no tener incidencia mayor en líneas menores de 30 Km. Para el cálculo de la distancia geodésica, se tiene:

$$S1 = \frac{\Delta\lambda''*N_m*\cos\varphi_m*arc1''\ [\ 1-(1/24)[(\Delta\lambda \text{ arco de } 1'')]^2]}{\text{sen}(\alpha_{12} +\Delta\alpha/2)}$$

$$S2 = \frac{[\ \Delta\varphi''\ \rho_m\, arc1''\cos(\Delta\lambda/2)\ [1-\ (1/24)[\ (\Delta\varphi \text{ arco de } 1'')]^2]}{\cos(\alpha+\Delta\alpha/2)}$$

S1 = S2 = S

E J E R C I CI O S

1.- Calcular el arco de paralelo entre las longitudes de -68º 00' y -68º 30', a la latitud sur de 36º 00'

Parámetros Elipsoide internacional

a = 6.378.388 m.

e^2 = 6,722670 E-03

S = Arco de Paralelo = N Δλarc 1" cos φ

$N = a/(1 - e^2 \, sen^2\varphi)^{1/2}$

N = 6.385.808,2 m. y φ = -36º 00'

Δλ = 1800"

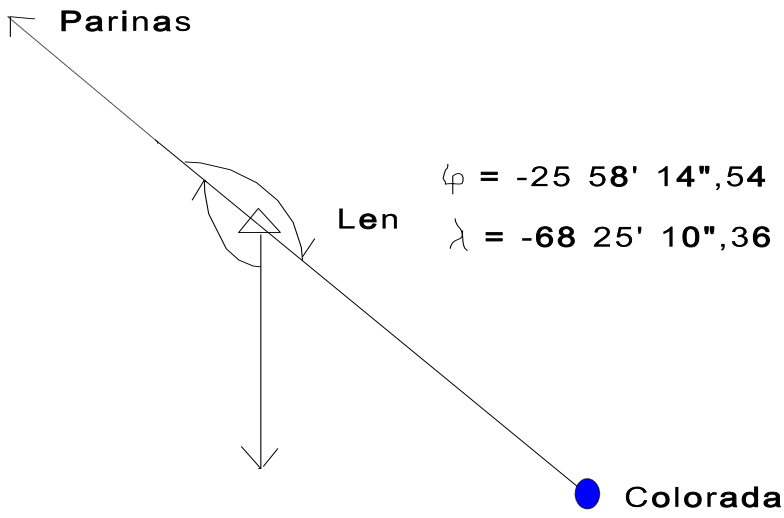
S = 45.083,84 metros

2.- Calcular el arco de meridiano entre las latitudes de -36º 00' y -36º 30' (se considera el elipsoide internacional)

φ1 = -36º 00'

φ2 = -36º 30'

3.- Calcular las coordenadas geográficas de **Colorada**



α (Parinas desde el sur) = 101 18' 30",013

Sistema Geodésico: PSAD-56 La Canoa

Distancia geodésica de León a Colorada = 19.195,72 metros

α (León a Colorada) = 284º 41' 48",813 ρ1 = 6.347.779,42 m.

N1 = 6.382.503,43 m.

I = 158", 2477582 II = - 0",427479

III = - 0",0003818

φ1 = -25º 58' 14",54

-Δ φ= 0º 02' 37",82

$\varphi'2$ = -26º 00' 52",36 (valor aproximado)

---------- (1ª Iteración) ----------

φ_m = - 25º 59' 33",45

M_m = 6.347.798 m. N = 6.382.503,43 m.

I = 158",2472768 II = - 0",4278932

III = - 0",0003824

$\varphi 1$ = -25º 58' 14",54

$-\Delta\varphi 2$= 2' 37",819

$\varphi 2$ = -26º 00' 52",359 (la 1ª Iteración converge , situación que no siempre se presenta, lo que debe hacerse normalmente es realizar a lo menos tres Iteraciones ,antes que se produzca la convergencia).

N2 = 6.382.516,384 m. $-\Delta\lambda$ = -667",7041703

$\lambda 1$ = -68º 25' 10",36

$-\Delta\lambda$= 11' 07",7042

$\lambda 2$ = -68º 14' 02",6558

4.- Calcular las coordenadas geográficas de Pastos Grandes a partir de las posiciones conocidas de Quebrada Honda y del Acimut Geodésico de la línea y su distancia geodésica.

DATOS:

Azimut de la línea = 323º 58' 38",056

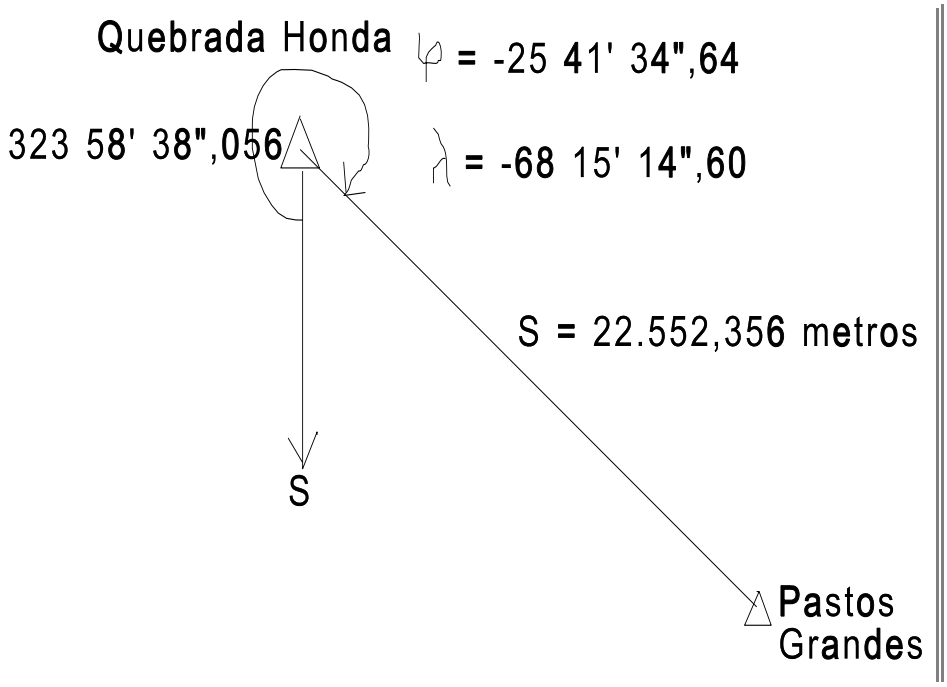
Distancia Geodésica = 22.552,356 metros

Elipsoide de referencia es el Internacional de 1924

a = 6.378.388 e^2 = 6,722670 E-03

$\varphi 1$ = -25º 41' 34",64

$\lambda 1$ = -68º 15' 14",60



Se calculará la Latitud de Pastos Grandes

N1 = 6.382.421,755 m.

ρ = 6.347.535,717 m.

$\varphi\Delta_1$ = 592",7125688 - 0",2154519 -0",00072

$-\Delta\varphi 1$ = 592",4964

$\varphi(1)2$ = - 25º 51' 27",14 (latitud aproximada)

---------- 1 ª Iteración ----------

φ_m = - 25º 46' 30",89

M_m = 6.347.607,7 m.

$-\Delta\varphi$= 592",7058449 - 0",2162412 - 0",0007250

$-\Delta\varphi$=592",489

$\varphi(2)2$ = -25º 51' 27",129

---------- 2ª Iteración ----------

φ_m = -25º 46' 30",88

ρ_m = 6.347.607,7 m.

$-\Delta\varphi$= 592",7058473 -0",21624120 -0",00072500

$-\Delta\varphi$= 592",488881

φ(3)2 = -25º 51' 27",129

φ(2)2 = φ(3) 2 ; luego se produce la convergencia en el tercer valor encontrado para _2, por lo tanto se toma este valor como definitivo para la latitud del punto 2.

2.-Cálculo de la Longitud

N2 = 6.382470,078 m.

-Δλ" = - 476",3203

λ1 = - 68º 14' 74",60
Δλ = 7' 56",32

λ2 = - 68º 07' 18",28

5.- Las posiciones geográficas (Latitud y Longitud) de dos vértices de poligonal; Cerro Oriental y Cerro Auxiliar, son conocidas. Se pide lo siguiente:

a) Calcular distancia Geodésica entre vértices

b) Azimut de la línea

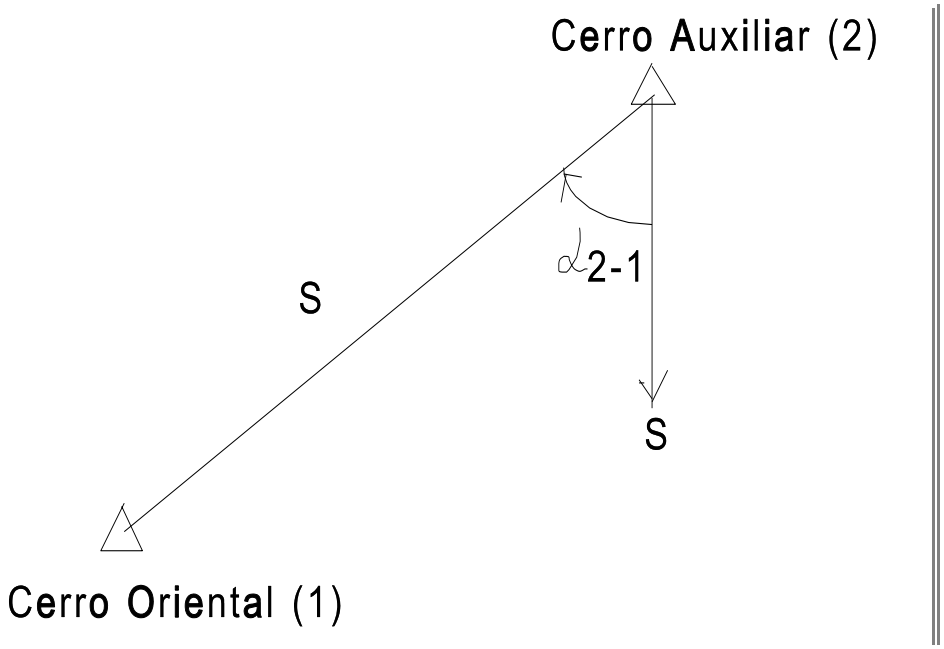
c) convergencia

DATOS :

	LATITUD	LONGITUD
Cerro Oriental	- 20º 22' 06",90	- 68º 44' 31",02
Cerro Auxiliar	- 20º 19' 08",54	- 68º 39' 41",00

Elipsoide de referencia es el Internacional: e^2 = 6,722670 E- 03

a = 6.378.388 m.



φm =- 20º 20' 37",72 $\Delta\varphi$ = + 178",36

$\Delta\lambda$ = +290",02

a) Cálculo de Convergencia

$\Delta\alpha$ = 100",826

b) Cálculo del Azimut Inverso

ρ_m = 6.343.237,624 m.

N_m = 6.380.980,858 m.

Tan ($\alpha + \Delta\alpha/2$) = 1,533682513

($\alpha + \Delta\alpha/2$) = 56º 53' 40",66

- $\Delta\alpha/2$ = 50",41

α_{21} = 56º 52' 50",25

α_{12} = α_{21} +180º + $\Delta\alpha$

α_{12} = 236º 54' 31",08

---

c) Cálculo de la Distancia Geodésica

S cos ($\alpha + \Delta\alpha/2$) = 5.485, 082823

S =5.485,082823/ cos($\alpha + \Delta\alpha/2$)

S 1 = 10.042, 620

S sen ($\alpha + \Delta\alpha/2$) = 8.412,37615

S = 8.412,37615/sen ($\alpha + \Delta\alpha/2$)

S 2 = 10.042,620

Luego S1 = S2 , por lo tanto se puede decir que la distancia geodésica ha sido calculada, al verificarse esta igualdad.

S = 10.042,620 metros

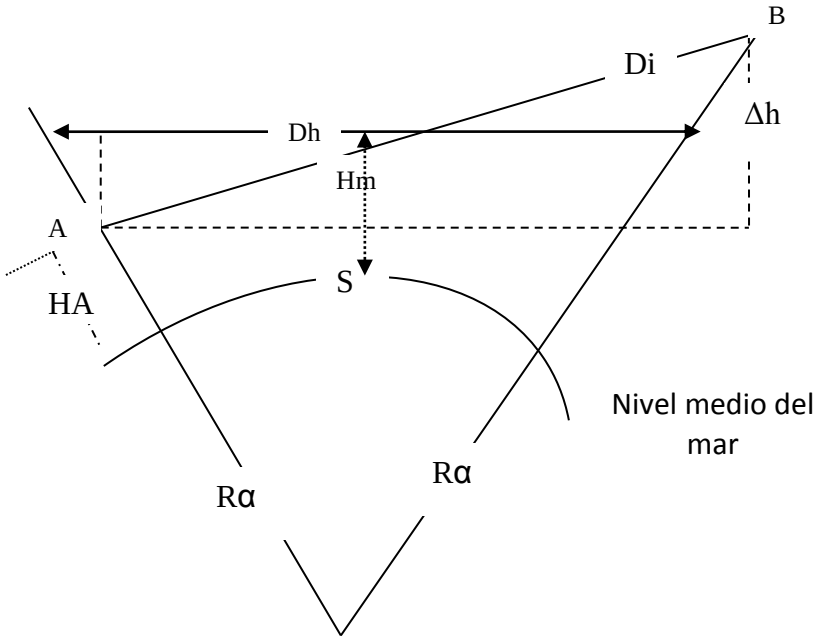
CALCULO DE DISTANCIA GEODESICA A PARTIR DE UNA DISTANCIA INCLINADA

Reducción de una línea inclinada a distancia geodésica

Para la realización de cálculos que permitan obtener posiciones geodésicas es necesario contar con la distancia geodésica. Para obtener esta distancia a partir de una distancia inclinada medida en terreno es necesario considerar las siguientes reducciones:

- Reducción de la distancia inclinada a distancia horizontal en la respectiva sección.
- Reducción de la distancia horizontal en su respectiva sección a distancia al nivel medio del mar.
- Reducción de la distancia al nivel medio del mar a arco geoidal (S).

Reducción de la distancia inclinada a distancia horizontal



$$dh = \sqrt{\left(\mathrm{Di}^2 - \Delta\mathrm{h}^2\right)} \Rightarrow dh = \left(\mathrm{Di}^2 - \Delta\mathrm{h}^2\right)^{0,5} \Rightarrow dh = Di * (1 - \frac{\Delta h^2}{Di^2})^{0,5}$$

Por medio de la serie $(1+x)^{0,5} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} * \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{3}{6}x^3 - .....$

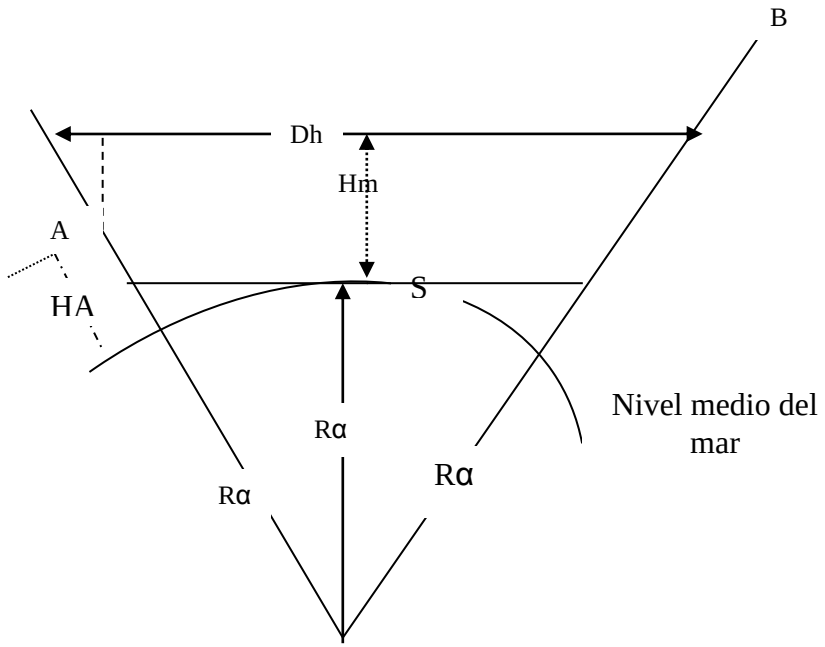
$$dh = Di * \left[1 + \frac{1}{2}(-\frac{\Delta h^2}{Di^2}) - \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \left(-\frac{\Delta h^2}{Di^2}\right)^2 + ...\right]$$

$$dh = Di * \left[1 - \frac{1}{2} * \frac{\Delta h^2}{Di^2} + \frac{1}{8}\frac{\Delta h^4}{Di^4}\right] \Rightarrow dh = Di - \frac{1}{2} * \frac{\Delta h^2}{Di}$$

$$dh = Di - \frac{1}{2} * \frac{\Delta h^2}{Di}$$

$Ch = -\frac{1}{2} * \frac{\Delta h^2}{Di}$; Corrección por desnivel

Reducción de la distancia horizontal al Nivel medio del Mar



$$hm = \frac{Ha + Hb}{2}$$

$$\frac{dh}{(hm + R\alpha)} = \frac{Dnmm}{R\alpha}$$

Dnmm = Distancia al nivel medio del mar

Rα= radio acimutal de la línea que forma la sección.

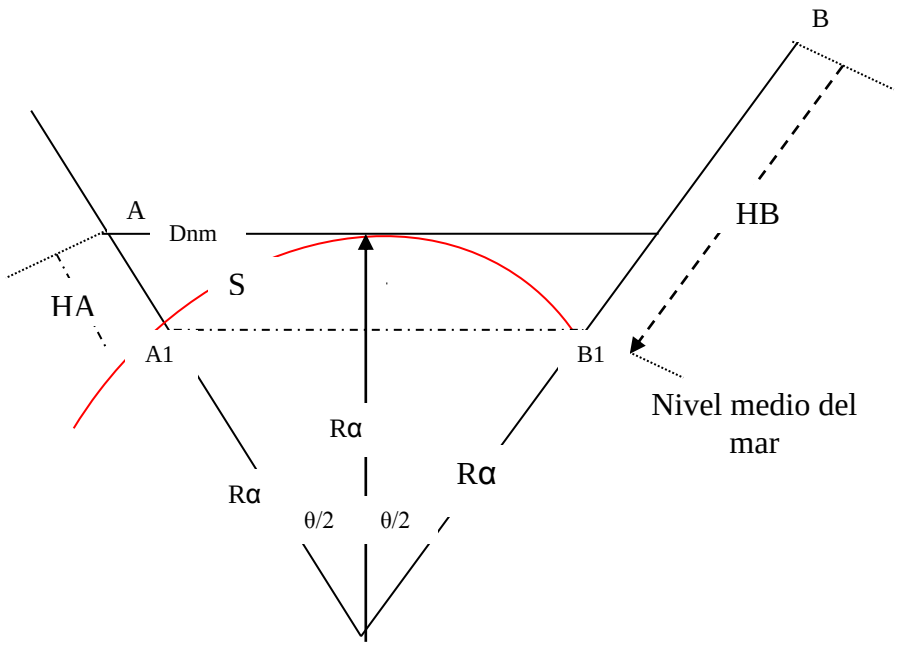
$$Dnmm = \frac{dh * R\alpha}{(hm + R\alpha)} \Rightarrow Dnmm = \frac{R\alpha * dh}{R\alpha * \left(1 + \frac{hm}{R\alpha}\right)} \Rightarrow Dnmm = dh * \left(1 + \frac{hm}{R\alpha}\right)^{-1}$$

Desarrollando la serie $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\ldots\ldots$

$$Dnmm = dh * \left[1 - \frac{hm}{R\alpha} + \frac{hm^2}{R\alpha^2} - \frac{hm^3}{R\alpha^3} + \ldots..\right]$$

$$Dnmm = dh - dh * \frac{hm}{R\alpha}$$

Reducción de la distancia al NMM a Geodésica (S)



$$arcoA1B1 = R\alpha * \theta$$

$$sen\frac{\theta}{2} = \frac{Dnmm}{2 * R\alpha} \Rightarrow R\alpha * sen\frac{\theta}{2} = \frac{Dnmm}{2} \Rightarrow 2 * R\alpha * sen\frac{\theta}{2} = Dnmm$$

Desarrollando la serie del seno de un ángulo: $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$

Y utilizando los dos primeros términos de la serie, se tiene:

$$sen\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{48}$$

$$Dnmm = 2 * R\alpha * sen\frac{\theta}{2} = R\alpha * \theta - R\alpha * \frac{\theta^3}{24}$$

$$\theta = \frac{S}{R\alpha}$$

$$Dnmm = R\alpha * \frac{S}{R\alpha} - R\alpha * \frac{\left(\frac{S}{R\alpha}\right)^3}{24}$$

$$Dnmm = S - \frac{S^3}{24 * R\alpha^2}$$

La distancia geodésica reducida desde una distancia inclinada medida en terreno queda determinada por la expresión siguiente:

$$S = Dnmm + \frac{S^3}{24 * R\alpha^2}$$

Como S no se conoce, se utiliza la Dnmm como una primera aproximación, luego se itera hasta que la corrección C converge en un valor que tiene como límite el milímetro

$$C = \frac{Dnnm^3}{24 * \mathrm{R}\alpha^2}$$

Luego S' se obtiene en $S' = Dnmm + C$; reemplazando $S'' = Dnmm + \frac{S'^3}{24 * \mathrm{R}\alpha^2}$

Se sigue iterando, hasta el valor de los S convergen en un valor al milímetro, a lo menos

Finalmente la Distancia Geodésica queda definida como sigue:

$$\mathbf{S = S^n}$$

Ejercicio

Elipsoide de referencia: Internacional 1924
Semi eje mayor (a) = 6.378.388 metros
Achatamiento (f) = 17297
Primera excentricidad (e) = 0,006722670022

Línea P a Q

Estación P

Hp = 4686,19 m.
Alt Inst p = 1,40 m.

Estación Q

Hq = 4230,83 m.
Alt. Inst. q =1,45 m.

Distancia Inclinada = 21.916,98 m.
Acimut de la línea = 325° 37 ‘ 43”
Latitud media entre estaciones= -31° 40’ 20”

Desarrollo

1.- Reducción a la horizontal

$$4686{,}19 + 1{,}40 = 4687{,}59$$
$$4230{,}83 + 1{,}45 = 4232{,}28$$

Δ= 455,31 metros

$$DH^2 = Di^2 - \Delta H^2$$

DH =21.912,25 metros

2.- Reducción al Nivel Medio del Mar

$$C = -\frac{DH * Hm}{R\alpha} + \frac{DH * Hm^2}{R\alpha^2}$$

$$\mathrm{Hm} = \frac{(4687{,}59 + 4232{,}28}{2}$$

Hm= 4459,935 metros

N= 6.384.078,72 m.

ρ = 6.352.934,90 m.

Rα= 6.362.828,085

C= - 15,36 metros

Dnmm = 21.912,25 - 15,36

Dnmm =21.896,89

3.- Reducción de la Cuerda a Arco

$$C_1 = \frac{Dnnm^3}{24 * \mathrm{R}\alpha^2}$$

$$C1 = \frac{21896{,}89^3}{24 * R\alpha^2}$$

C1= +0, 0108 metros

S' =21896, 89 +0, 0108 m. => S' = 21.896,900 m.

$$C_2 = \frac{21896{,}900^3}{24 * R\alpha^2}$$

C2= +0,0108 m.

C1 = C2 (iteración converge), luego la distancia geodésica es:

S= 21.896,900

CALCULO DE ALTURAS

DOCUMENTO TÉCNICO SOBRE O SISTEMA DE REFERÊNCIA VERTICAL PARA A AMÉRICA DO SUL (preparado por Hermann Drewes, Laura Sánchez, Denizar Blitzkow e Silvio Freitas em 1998)

La reciente determinación del dátum SIRGAS (Sistema de Referencia Geocéntrico para América del Sur), garantiza la solución de las discrepancias existentes entre los diferentes marcos geodésicos nacionales. Su principal ventaja radica en que se constituye en una plataforma común de referencia horizontal. Sin embargo, la disparidad persiste al comparar la posición vertical entre países vecinos. Esta circunstancia obliga que, al mantenimiento de SIRGAS, sea adicionada la definición de un sistema vertical que satisfaga no sólo las demandas de la representación cartográfica, sino también las exigencias del control geodésico actual y la homogeneización de este tipo de información a nivel internacional. Este nuevo sistema debe obedecer a una combinación consistente de las alturas niveladas establecidas, los datos de gravedad registrados y las alturas elipsoidales obtenidas mediante los levantamientos GPS, sin descuidar la normalización que un modelo geoidal gravimétrico les impone. Su determinación considera cuatro aspectos fundamentales: Definición del tipo de alturas que conforman su estructura, determinación del nivel básico al que están referidas dichas alturas, materialización de éstas mediante la realización de un marco de referencia y, finalmente, su cambio a través del tiempo.

Considerando lo expuesto y, dentro del contexto de la Resolución No. 4 del Grupo de Trabajo III de SIRGAS, en este documento se hace una exposición de los conceptos físicos y geométricos involucrados en la definición de alturas, su plataforma de referencia y la solución más conveniente para cualificar el marco geodésico vigente en América del Sur.

I. Tipos de alturas

La altura de un punto sobre la superficie terrestre es la distancia existente, sobre la línea vertical, entre éste y una superficie de referencia (dátum vertical). Su determinación se realiza mediante un procedimiento conocido como nivelación, el cual, a su vez, puede ser barométrico, trigonométrico, geométrico o espacial. Sin embargo, debido a la influencia del campo de gravedad terrestre en el proceso de medición, los resultados obtenidos deben ser cualificados involucrando correcciones gravimétricas.

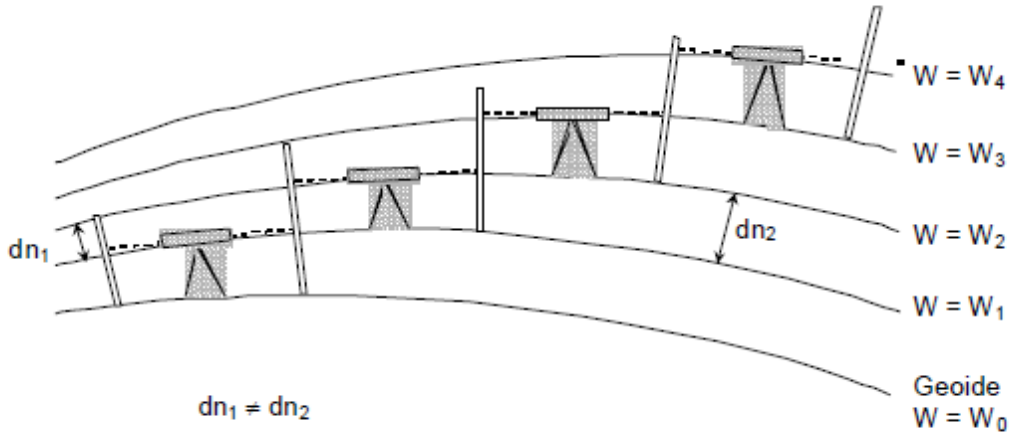
En el proceso convencional de determinación de alturas, el telescopio del instrumento es tangente a la superficie equipotencial local y la línea de la plomada coincide con el vector de la fuerza de gravedad, el cual es perpendicular a aquellas superficies. De aquí, las diferencias de nivel calculadas no solo reflejan las variaciones topográficas del terreno, sino que además consideran las alteraciones gravitacionales de la Tierra. La desviación que estas alteraciones generan sobre las alturas medidas pueden ser cuantificadas y tratadas de acuerdo con los conceptos físicos considerados en su procesamiento. Así, las alturas utilizadas en Geodesia se clasifican según su determinación, su aplicación y el modelo matemático o físico considerado en su definición. Dentro de este marco, se distinguen alturas de tipo geométrico (niveladas y elipsoidales) y alturas de tipo físico (dinámicas, normales y ortométricas).

1. Alturas de tipo geométrico

1.1 Alturas niveladas

Son las obtenidas bajo el proceso de nivelación geométrica con métodos ópticos de medición (Figura 1). Las diferencias de nivel observadas varían de acuerdo con el campo de gravedad inherente al sitio en consideración.

Figura 1



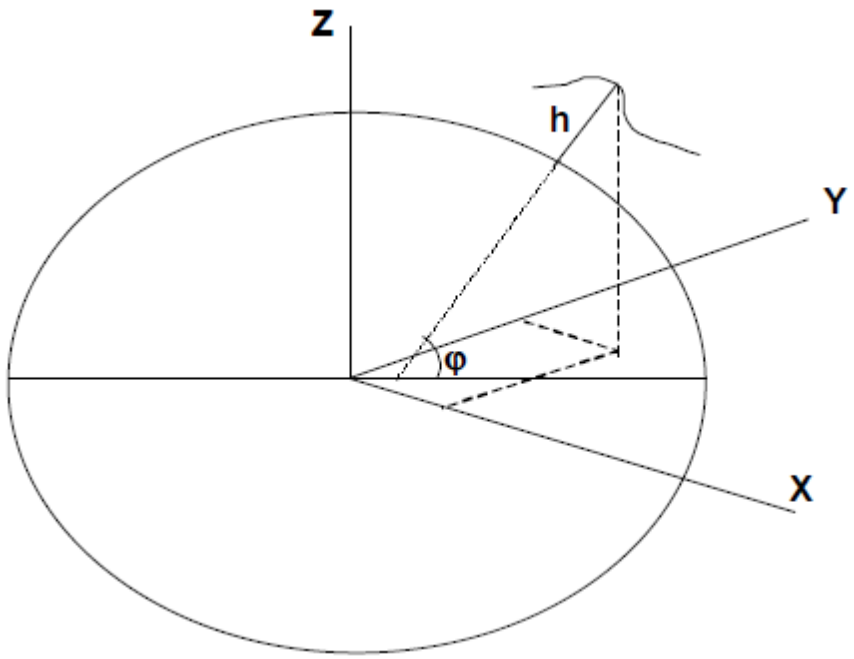
Las cantidades observadas (dn) corresponden con la distancia existente entre las superficies equipotenciales del campo de gravedad terrestre y su sumatoria permite conocer la diferencia de altura entre los puntos de interés. No obstante, debido a la forma elipsoidal de la Tierra y a la distribución irregular de sus masas internas, las superficies equipotenciales no son equidistantes; los valores de desnivel entre éstas, varían de acuerdo con el trayecto de medición.

Como estas alturas dependen del camino descrito en el proceso de nivelación, fácilmente pueden obtenerse diferentes valores de altura para un mismo punto, haciendo que sean utilizadas en áreas pequeñas que no requieren considerar ni la figura elipsoidal de la Tierra ni las variaciones de su campo de gravedad. Su aplicación práctica es efectiva solo en redes locales con, aproximadamente, 10 km de extensión.

1.2 Alturas elipsoidales

Las alturas elipsoidales (h) representan la separación entre la superficie topográfica terrestre y el elipsoide. Dicha separación se calcula sobre la línea perpendicular a este último. (Figura 2).

Figura 2: alturas elipsoidales



Las alturas elipsoidales son obtenidas a partir de las coordenadas geocéntricas cartesianas (X, Y, Z) definidas sobre un elipsoide de referencia (p. ej. el modelo Geodetic Reference System 1980, GRS80, o el World Geodetic System 1984, WGS84, los cuales, en la práctica, son iguales), y determinadas a partir del posicionamiento satelitario de los puntos de interés.

Debido a la utilización masiva de la técnica GPS, es indispensable considerar este tipo de alturas en los registros oficiales de las cantidades directamente medidas. Sin embargo, como éstas no consideran el campo de gravedad terrestre en su determinación, pueden presentar valores iguales en puntos con niveles diferentes, o viceversa, haciendo que su aplicación en la práctica sea mínima. Tal circunstancia exige que éstas sean complementadas con otro tipo que sí considere el campo de gravedad terrestre.

2. Alturas de tipo físico

Una manera de determinar las distancias reales entre las superficies de nivel es cuantificando sus diferencias de potencial, las cuales al ser sumadas en un circuito cerrado siempre serán cero y los resultados obtenidos, por diferentes trayectorias, serán iguales.

Esto debido a que los valores de potencial son unívocos y dependen solamente de la posición. En la práctica, estas diferencias corresponden con los resultados de las nivelaciones clásicas combinadas con los valores de gravedad registrados en la zona de interés. La diferencia de potencial entre cada punto de cálculo y el geoide (principal superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre) se conoce como número geopotencial:

$$\int_0^A g\, dn = W_0 - W_A = C \qquad (1)$$

Siendo g la gravedad observada en el punto de cálculo, dn diferencial en altura, Wo el potencial sobre el geoide y WA el potencial sobre la superficie que pasa por el punto de cálculo. La dimensión de los números geopotenciales es [m2/s2], la cual no representa una longitud, haciendo que su utilización en la práctica no sea conveniente. Estos números pueden ser expresados en unidades de distancia al ser divididos por algún valor convencional de gravedad (2)

$$altura\,(H) = \frac{número\ geopotencial\ (C)}{valor\ de\ gravedad\ (G)} \qquad (2)$$

En (2) *valor de gravedad G, número geopotencial C, altura H.*

La clase de altura (H) obtenida al resolver la expresión 2, dependerá del tipo de gravedad (G) incluida. Si G corresponde con el valor medio de gravedad teórica (normal) entre la estación y la superficie de referencia, la altura calculada será normal. Mientras que, si G equivale a un valor constante de gravedad teórica para un punto arbitrario, H es conocida como altura dinámica. Finalmente, si G es igual al valor medio de gravedad real entre el geoide y la estación evaluada, la altura estimada es llamada ortométrica.

2.1 Alturas dinámicas

Las alturas dinámicas se calculan al dividir los números geopotenciales por un valor constante de gravedad (γ cte):

$$H_{(din)} = \frac{C}{\gamma_{cte}} \qquad (3)$$

La ventaja de las alturas dinámicas radica en que, valores iguales de éstas representan una superficie equipotencial del campo de gravedad, es decir; una superficie de agua en calma en cualquier elevación sobre el geoide tiene siempre la misma altura dinámica. Estas alturas se obtienen a partir de las niveladas, mediante la aplicación de correcciones que expresan los incrementos o decrementos, en altura, generados por involucrar un valor constante de gravedad.

La principal desventaja de este tipo de alturas está en que, por causa de la convergencia de las superficies equipotenciales (especialmente en dirección norte-sur, figura 1) la distancia geométrica entre ellas varía ostensiblemente (5 x 10-3 unidades del ecuador a los polos), sin alterarse su altura dinámica. Por ejemplo, si se consideran dos superficies equipotenciales, cuya distancia geométrica es de 100 m en el ecuador, su equivalencia en los polos será de 99,5 m, mientras que, su altura dinámica siempre será constante.

2.2 Alturas normales

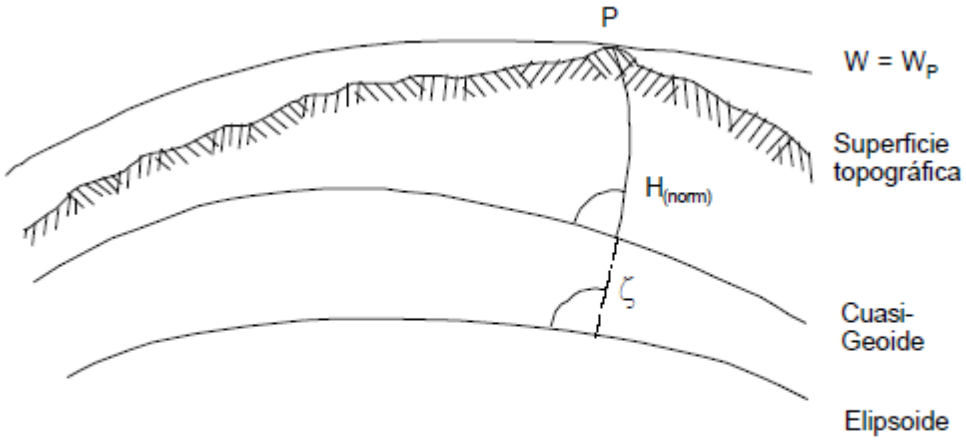
En las alturas normales los números geopotenciales no son divididos por un valor constante de gravedad (como en la ecuación 3) sino, por el valor medio de la gravedad normal entre la superficie de referencia (denominada cuasi-geoide) y el punto en consideración (γ ') (Figura 3):

$$H_{(norm)} = \frac{C}{\gamma'} \qquad (4)$$

γ' se obtiene a partir de la fórmula de la gravedad normal terrestre, la cual está sólo en función de la latitud geográfica del punto y es generada por el elipsoide de referencia utilizado.

Las correcciones normales que se aplican a las alturas niveladas son más pequeñas que las de las alturas dinámicas, ya que γ' se obtiene a partir de la fórmula de la gravedad normal terrestre, la cual está sólo en función de la latitud geográfica del punto y es generada por el elipsoide de referencia utilizado.

Figura 3: Alturas normales



De acuerdo con lo expuesto, estas alturas pueden obtenerse a partir de las elipsoidales si se les descuenta la ondulación del cuasi-geoide, la cual es conocida como anomalía de altura o altura anómala (ζ):

$$H_{(norm)} = h - \zeta \qquad (5)$$

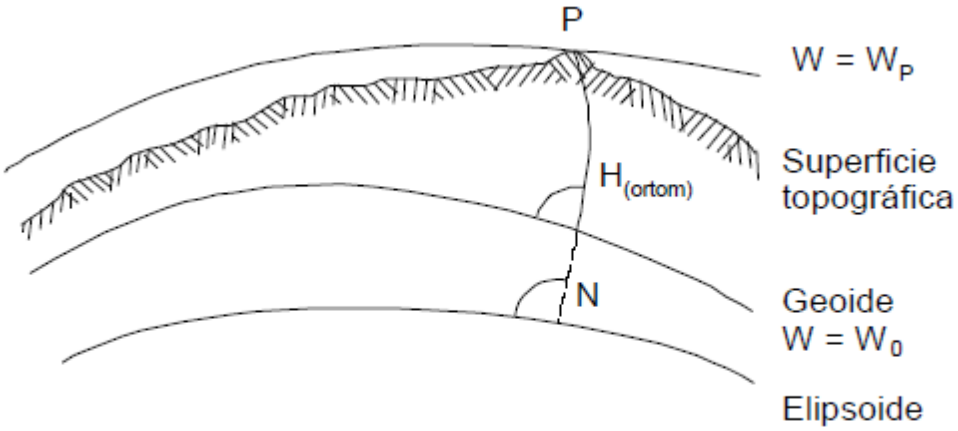
2.3 Alturas ortométricas

El cálculo de las alturas ortométricas es similar al de las normales, sólo que los números geopotenciales son divididos por el valor medio de la gravedad verdadera (g') entre el punto evaluado y el geoide. (Figura 4).

$$H_{(ortom)} = \frac{C}{g'} \qquad (6)$$

El inconveniente que presentan estas alturas se basa en que no es posible conocer el valor de g‘. Normalmente, la gravedad real es medida sobre la superficie topográfica y continuarla, hacia abajo, a lo largo de la línea de la plomada, requiere de la formulación de modelos sobre la distribución de densidad de las masas terrestres. De esta manera, los valores de altura ortométrica calculados dependen de las hipótesis utilizadas en el modelamiento de la densidad. Los métodos más comunes en la determinación de alturas ortométricas corresponden con las hipótesis de Helmert, Vignal, Baranov y Aire Libre (Free Air).

Figura 4: Alturas ortométricas



Las correcciones ortométricas aplicadas a las alturas niveladas están en el mismo orden que las utilizadas para la obtención de las normales. Sin embargo, la diferencia entre alturas ortométricas y normales (y con esto entre el geoide y el cuasi-geoide) depende de la discrepancia entre la gravedad verdadera modelada a través de alguna hipótesis y la gravedad normal, pudiéndose alcanzar valores de decímetros en estas diferencias. Las alturas ortométricas pueden obtenerse a partir de las elipsoidales mediante la sustracción de las ondulaciones geoidales N:

$$H_{(ortom)} = h - N \qquad (7)$$

Tanto en la determinación de N, como en el cálculo de g' (ecuación 6) y en la estimación de las correcciones ortométricas, se requiere de una hipótesis sobre la distribución de densidades de las masas terrestres, lo cual; a pesar de ser la misma en los tres cálculos, no garantiza la obtención de un conjunto homogéneo de alturas ortométricas y dificulta su combinación con las alturas obtenidas a partir de las elipsoidales.

II. Superficie de referencia para la definición de alturas

Toda nivelación clásica parte de un punto de referencia (dátum vertical), el cual es determinado mediante la observación del nivel del mar en largos períodos de tiempo y se asume coincidente con el geoide. Sin embargo, debido al dinamismo oceánico del planeta, el mar presenta diferentes niveles que dependen de la variación temporal de la superficie del mar (presión atmosférica, temperatura oceánica, etc.) y de la posición geográfica del mareógrafo (corrientes oceánicas, densidad del agua, etc.), lo que se traduce en diferencias de nivel de hasta dos metros entre varios mareógrafos.

Para superar los inconvenientes tácitos en la definición vertical sustentada por los mareógrafos, es necesario encontrar una superficie que constituya una referencia global, independiente del nivel del mar observado. El problema fundamental de la Geodesia es determinar la superficie equipotencial del campo de la gravedad terrestre que coincide (en primera aproximación) con el nivel medio del mar en completa calma. El comportamiento de dicha superficie depende de la caracterización que le asigna el campo de gravedad y su deformación causada por la existencia de masas internas de diferentes densidades. Su determinación, está sujeta a ciertas consideraciones teóricas que permiten tener en cuenta dos conceptos:

a. Geoide: superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre. Su estimación requiere de la formulación de hipótesis sobre la distribución de las masas internas del planeta.
b. Cuasi-geoide: superficie no equipotencial, muy cercana al geoide. Su determinación no requiere de hipótesis geofísicas, se basa en el modelamiento matemático del campo de gravedad normal.

A las alturas ortométricas les corresponde, como superficie de referencia, el geoide, mientras que a las normales, les corresponde el cuasi-geoide. En cuanto a

las alturas elipsoidales, éstas están referidas al modelo geométrico terrestre (elipsoide de revolución) considerado, el cual implícitamente está descrito por una superficie equipotencial normal obtenida a partir de formulaciones matemáticas ya establecidas.

III. Realización del marco de referencia vertical

Una vez definido el tipo de alturas y su plataforma correspondiente, es necesario materializar este sistema mediante el establecimiento de un conjunto de estaciones (red básica) que constituyan el punto de partida para la propagación del control vertical. Dentro de este conjunto, deben considerarse los mareógrafos que sirven de base para el sistema altimétrico actual, logrando de esta manera, su vinculación al nuevo y manteniendo la vigencia de las alturas definidas por el método clásico.

Las estaciones que conforman la red vertical básica tienen que ser niveladas geométricamente con corrección gravimétrica y estar definidas geodésicamente con posicionamiento GPS (Dátum SIRGAS). Estas características, Complementadas con la definición de un modelo geoidal (cuasi-geoidal) para Suramérica, permiten realizar el marco de referencia vertical.

IV. Mantenimiento del sistema vertical de referencia

Al igual que la dinámica terrestre deforma las redes geodésicas horizontales, también altera las altimétricas. Los cambios en la posición vertical de la superficie topográfica se deben principalmente a:

a. Mutación de la superficie de referencia (geoide o cuasi-geoide) como consecuencia de las modificaciones en la distribución de las masas internas terrestres, generadas por subducción, obducción, desplazamiento o choque de las placas tectónicas.

b. Variación de la superficie de referencia por cambio del nivel medio del mar a través del tiempo, incluyendo deshielo polar y cambios en la temperatura oceánica.
c. Los movimientos verticales resultantes de deformaciones corticales, de la acomodación de capas sedimentarias y modificaciones en el relieve topográfico.

Estos tres aspectos demandan del seguimiento continuo del marco de referencia vertical, con el propósito de establecer su variación y mantener la vigencia de las alturas definidas, mediante su actualización permanente.

V. Conclusiones y recomendaciones

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, se recomienda que la definición del Sistema Vertical de Referencia para América del Sur se fundamente en dos tipos de alturas: las elipsoidales y las normales. Los argumentos se resumen en:

Las alturas elipsoidales son suficientes para definir un marco de referencia vertical preciso. No obstante, al ser esencialmente geométricas, éstas deben ser complementadas con un conjunto de alturas de tipo físico que permitan satisfacer las necesidades prácticas de los usuarios comunes.

Dentro de las alturas de tipo físico, se destacan las alturas normales y las ortométricas. Sin embargo, las normales se prefieren, ya que; a pesar de tener aplicación práctica similar a las ortométricas, en su determinación no se requiere de la formulación de hipótesis o modelos geofísicos de la densidad de las masas internas terrestres, facilitándose su evaluación a partir de los números geopotenciales y de la formulación matemática del campo de gravedad normal.

Las alturas normales utilizan como plataforma de referencia el cuasi-geoide, el cual se calcula normalmente por métodos gravimétricos y satelitales. Mientras

que, el geoide, superficie de referencia de las alturas ortométricas, demanda de la formulación de modelos geofísicos para su determinación, lo que se traduce en la variación de las alturas, cada vez que cambie la hipótesis de estimación.

Las alturas normales se obtienen más fácilmente, que las ortométricas, a partir de las mediciones GPS. Esto se debe a que, en la primera clase, las alturas elipsoidales son disminuidas por cantidades calculadas matemáticamente (alturas anómalas del cuasigeoide), mientras que en la segunda, deben considerarse valores derivados de hipótesis geofíscas (ondulaciones geoidales).

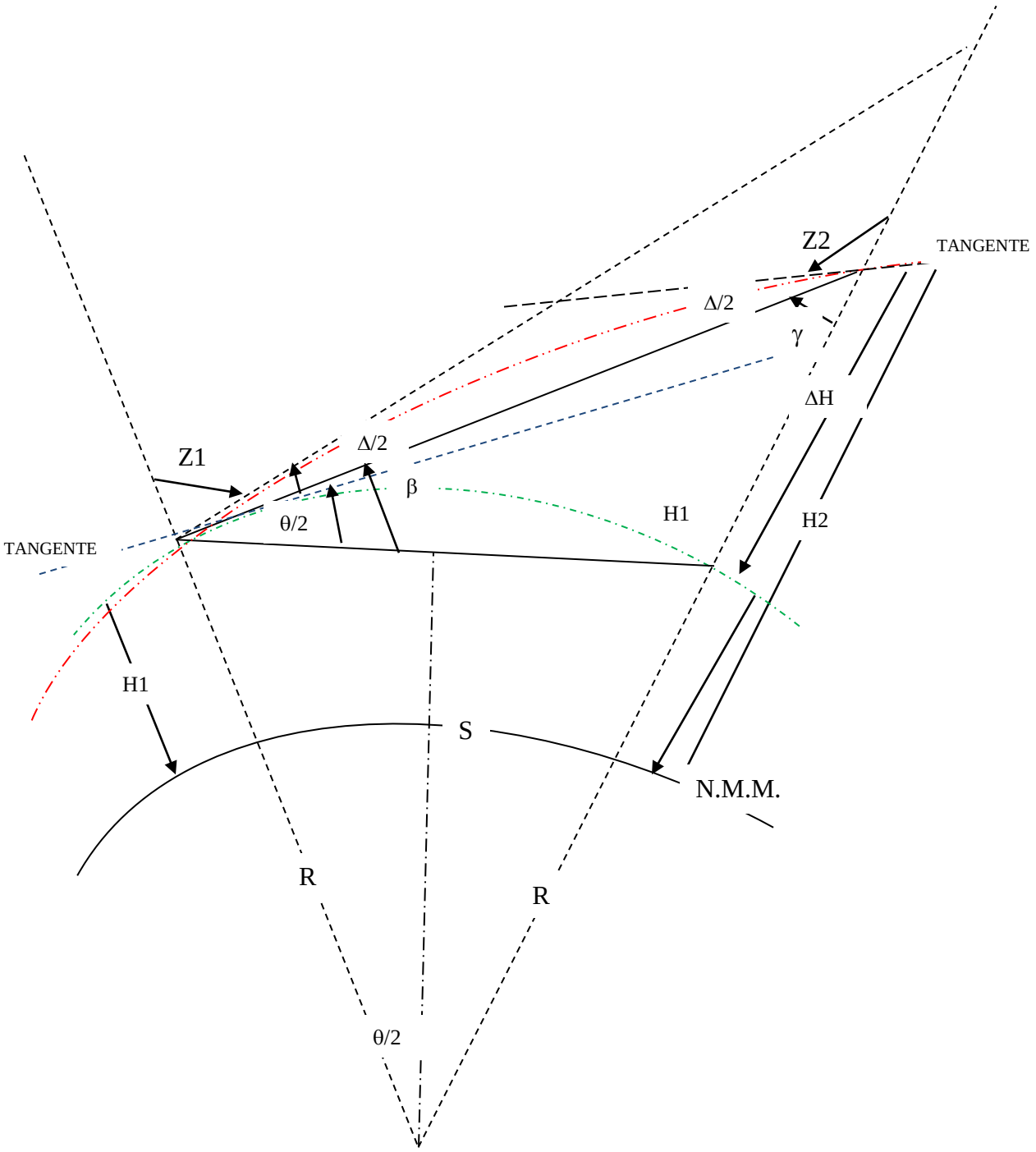
Las alturas normales facilitan la combinación de las obtenidas a partir del posicionamiento GPS y sus correspondientes, calculadas mediante la nivelación geométrica reducida a través de correcciones gravimétricas normales. Esta condición, garantiza una extensión más homogénea del control vertical en los diferentes países de América del Sur, sin descuidar la consistencia de un marco de referencia vertical único.

La superficie de referencia debe definirse de acuerdo con el tipo de alturas seleccionado, la cual, en este caso corresponde con el cuasi-geoide. Es conveniente que éste sea determinado de manera conjunta en todos los países de América del Sur.

Finalmente, con el propósito de vincular los sistemas clásicos de referencia vertical, es necesario determinar las alturas normales de los mareógrafos que constituyen los diferentes dátum. Para el efecto, deben combinarse rastreos GPS, altimetría satelital y alturas anómalas del modelo cuasi-geoidal.

NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA GEODÉSICA

CALCULO DE ALTURAS CON CENITALES RECIPROCOS



$$\Delta H = 2 * (R * H1) * sen\frac{\theta}{2} * \frac{sen\beta}{sen\gamma}$$

$$\beta = \frac{Z2 - Z1}{2}$$

$$\gamma = 90° - \left[\frac{\theta}{2} + \frac{Z2 - Z1}{2}\right]$$

Reemplazando en la diferencia de altura, se tiene:

$$\Delta H = 2 * (R + H1) * sen\frac{\theta}{2} * \frac{sen\left[\frac{Z2 - Z1}{2}\right]}{sen\left[90° - \left[\frac{\theta}{2} + \frac{Z2 - Z1}{2}\right]\right]}$$

Dividiendo por: $cos\frac{\theta}{2} * cos\frac{Z2-Z1}{2}$; tanto el denominador como el numerador, se tiene finalmente

$$\Delta H = \frac{2 * (R + H1) * tan\frac{\theta}{2} * tag\frac{Z2 - Z1}{2}}{1 - tag\frac{\theta}{2} * tag\frac{Z2 - Z1}{2}}$$

Desarrollando la función tangente, se tiene:

$$\Delta H = \frac{2 * (R + H1) * \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\frac{\theta}{2}^{3}}{3}\right] * tag\frac{Z2 - Z1}{2}}{1 - tag\frac{\theta}{2} * tag\frac{Z2 - Z1}{2}}$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{S}{2 * R}$$

Reemplazando, se tiene finalmente:

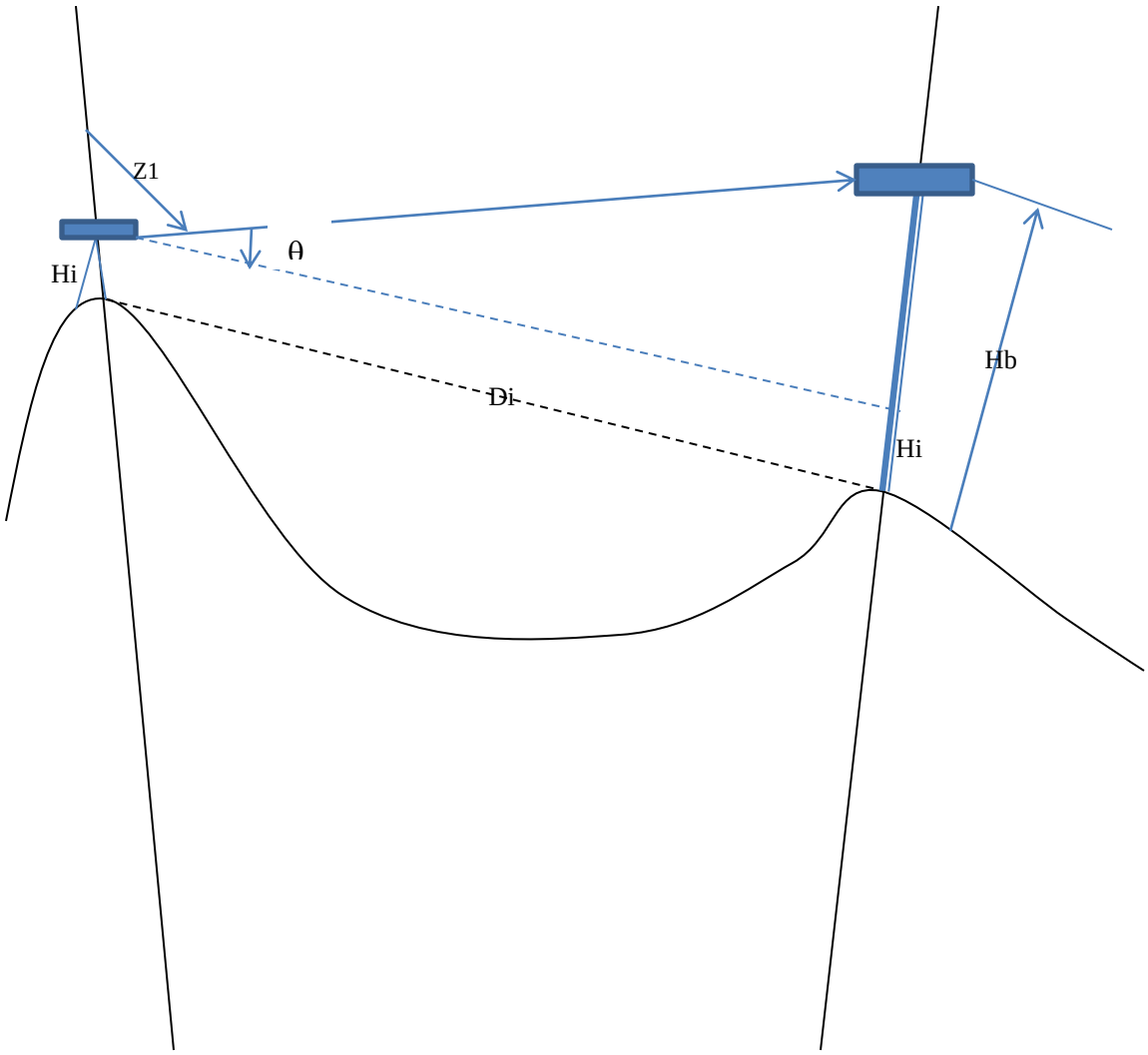
$$\Delta H = S * tang\frac{Z2 - Z1}{2} * \left[1 + \frac{H1}{R\alpha}\right] * \left[1 + \frac{s * tang\frac{Z2 - Z1}{2}}{2 * R\alpha}\right] * \left[1 + \frac{S^2}{12 * R\alpha^2}\right]$$

Rα =radio acimutal

$$\Delta H = S * tang\frac{Z2 - Z1}{2} * A * B * C$$

Reducción a la marca entre estaciones

Las mediciones de ángulos cenitales entre estaciones que se encuentran a grandes distancias generan que tanto las alturas instrumentales como las alturas de banderas o señales visadas son diferentes, por este motivo es necesario reducir estos ángulos a la marca en terreno.



$$\frac{Sen\,\theta}{(Hb - Hi)} = \frac{Sen\,Z1}{Di}$$

distancia inclinada

$$\theta" = \frac{(Hb - Hi) * senZ1}{Di * arc\ 1"}$$

Distancia geodésica

$$\theta" = \frac{(Hb - Hi)}{S * arc\ 1"}$$

EJERCICIO

Calcular la cota del punto B

Estación A	**Estación B**
Z1= 93° 09’ 00”,42	Z2= 86° 56’ 43”,01
Instrumento 1= 1,45 m.	Instrumento 2= 1,42 m.
Bandera B= 1,31 m.	Bandera A = 4,00 m.
Cota 4.610,4 m.	
S= 12.991,527 m.	
Rα = 6.367.792,0 m.	

1.- Reducción a la línea entre estaciones

$$\theta ab = \frac{4 - 1{,}45}{12991{,}52\ 7 * 4{,}848136811 * 10^{-6}}$$

$$\theta ba = \frac{1{,}31 - 1{,}42}{12991{,}52\ 7 * 4{,}848136811 * 10^{-6}}$$

$$\theta ab = +40",49$$

$$\theta ba = -1",75$$

Ángulos reducidos a la marca entre estaciones

Z1 Corregido = 93° 09’ 00”,42 + 40”,49 = **93° 09’ 40”,91**

Z2 Corregido = 86° 56’ 43”,01 – 1”,75 **= 86° 56’ 41”,26**

Calculo de cota del punto B

(Z2 – Z1)= -6° 12’ 59”,65

A= 1,000724019

B= 1,000055394

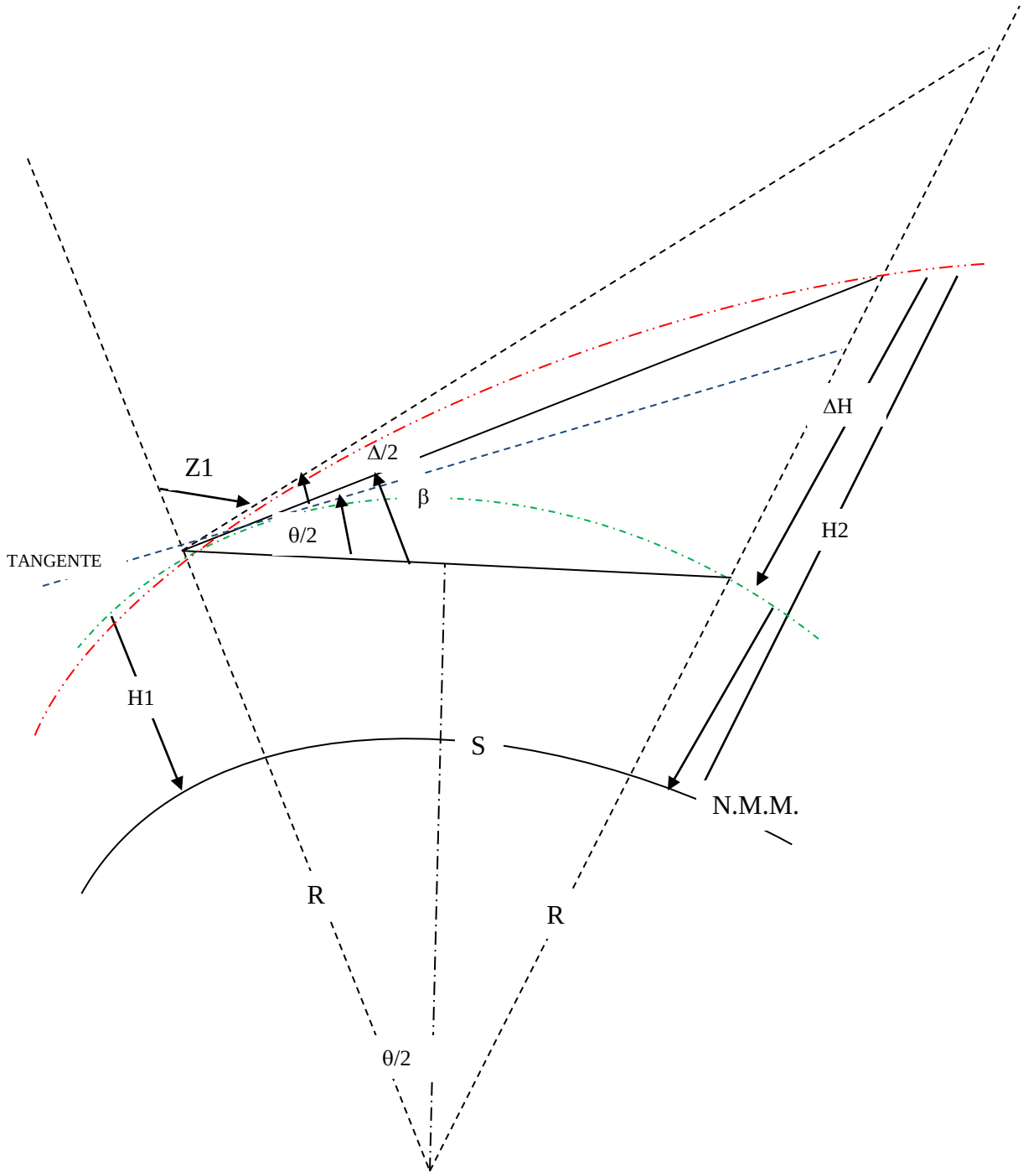
C= 1,000000347

A*B*C = 1,0007798

∆H = -706,03 m.

Cota del punto B = 4.610,4 – 706,03 **= 3.904,37 metros**

CALCULO DE ALTURAS CON CENITALES NO RECIPROCOS



$$\Delta H = S * tang\beta$$

$$\beta = 90 + \frac{\theta}{2} - Z1 - \frac{\Delta}{2}$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{S}{2 * R\alpha}$$

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{S}{2 * R\alpha} * K$$

K=2*m : refracción de la línea

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{S * m}{R\alpha}$$

$$Tang\ \beta = tang\left[90° + \frac{S}{2 * R\alpha} - \frac{S * m}{R\alpha} - Z1\right]$$

$$\Delta H = S * tang\left[90° - Z1 + (0{,}5 - m) * \frac{S}{R\alpha * arc\ 1"}\right] + Alt.Instrumento - alt.señal$$

$$\Delta H = S * tang[90° - Z1 + k] + Alt.Inst - Alt.Señal$$

$$k = (0{,}5 - m) * \frac{S}{R\alpha * arc\ 1"}$$

La experiencia en la medición de cenitales recíprocos ha demostrado que un buen valor de k, varía entre un valor promedio de 0,014 seg/metro y un valor máximo de 0,015 seg/m y un valor mínimo de 0,013 seg/m. Estos valores aseguran el nivel de confianza de una medición de cenitales, asegurando una buena calidad en el cálculo de alturas mediante nivelación trigonométrica, cuando la medición comprende distancias grandes entre estaciones.

EJERCICIO

Se desea calcular la cota del punto C desde el punto A, en esta oportunidad no se han medido cenitales recíprocos.

Estación A

Z1 = 89° 00’ 01”

Alt Instr. = 1,38 m.

Altura señal medida= 4,00 m

Cota de A = 4520,85 m.

S= 9500,15 m.

$$\Delta H = S * tang[90° - Z1 + k] + Alt.Inst - Alt.Señal$$

k= consideraremos el valor promedio de 0,014 seg/m. al no tener un valor local de referencia

$$k = \frac{0{,}014\ seg}{m} * 9500{,}15\ m$$

K= 133”,00

90° 00’ 00”
02’ 13

90°02’ 13”

90°02 ‘ 13” – 89° 00’ 01” = 1° 02’ 12”

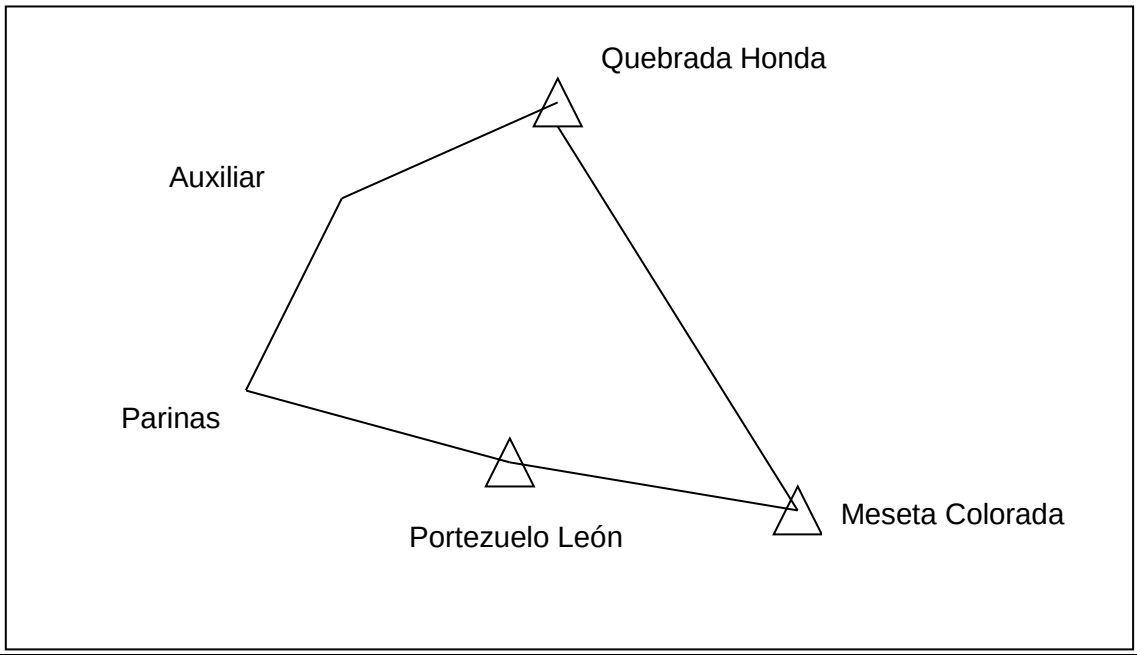
$$\Delta H = 9500{,}15 * tang[1°\ 02'12"] + 1{,}38 - 4{,}0$$

ΔH = 169,29 metros

Cota C = 4520,85 + 169,29

Cota C= 4690,14

CALCULO DE UNA POLIGONAL GEODÉSICA



Estación	Punto	Ang Horizontal	Ang. Vertical	Altura señal
Q. Honda i=1,40 m.	Meseta Colorada	00º 00` 00”		
	Auxiliar	55º 23` 56,9 “	91º 32`51 “	1,32 m.
Auxiliar i = 1,45 m.	Quebrada Honda	00º 00` 00”	88º 39`50 “	2,05 m.
	Parinas	167º 14`18,5”	88º 08`24”	2,00 m.
Parinas i = 1,40	Auxiliar	00º 00` 00”	92º 00`04”	1,15 m.
	Portezuelo León	61º 48`37,6”	90º 28` 38”	2,00 m.
Port. León i = 1,44 m.	Parinas	00º 00` 00”	89º 37` 52”	1,35 m.
	Meseta Colorada	183º 23` 18,8 “		
Meseta Colorada	Portezuelo León	00º 00` 00”		
	Quebrada Honda	72º 09` 20,9 “		

Distancias Inclinadas: Portezuelo León a Parinas= 13.967,59 m.
Parinas a Auxiliar = 16.395,26 m. // Auxiliar a Quebrada Honda = 25.168,32 m.

Estación	Latitud	Longitud	Cota (m.)
Quebrada Honda	- 25º 41`34,59”	- 68º 15`14,63”	4891,6
Portezuelo León	- 25º 58`14,54”	- 68º 25´10,36”	4704,4
Meseta Colorada	- 26º 00`52,41”	- 68º 14`02,67”	

Sistema Geodésico: PSAD-56 La Canoa (Elipsoide Internacional 1924 de Hayford)

Calcular y Ajustar de las posiciones geográficas y cota de Parinas y Auxiliar

Calculo de Cotas

Portezuelo León	Parinas
Z1 = 89° 37’ 52”	Z2 = 90° 28’ 38”
i = 1,44 m.	i2 = 1,40 m.
b2 = 1,35 m.	b1 = 2,00 m.
Di = 13.967,59 m.	
Hi= 4.704,40 m.	

$$\theta”1 = \frac{(1{,}35 - 1{,}44) sen\ Z1}{13967{,}59 * arc\ 1”} = -1",33$$

$$\theta”2 = \frac{(2 - 1{,}40) sen\ Z2}{13967{,}59 * arc\ 1”} = 8",86$$

89° 37’ 52” - 1”,33 => Z1c= 89° 37’ 50”,67

90° 28’ 38” + 8”,86 => Z2c = 90° 28’ 46”,86

$$\Delta H = Di * Sen\left[\frac{(Z2c - Z1c)}{2}\right] = +103{,}48\ m.$$

Altura de Parinas sin compensar

4804,4 + 103,48 => **H2 = 4807,88 metros**

Parinas	Auxiliar
Z1 = 92° 00’ 04”	Z2 = 88° 08’ 24”
i = 1,40 m.	i2 = 1,45 m.
b2 = 1,15 m.	b1 = 2,00 m.
Di = 16.395,26 m.	
Hi= 4.807,88 m.	

$$\theta”1 = -3",14$$
$$\theta”2 = +6",92$$

92° 00’ 04 – 3”,14 => Z1c = 92° 00’ 00”,86

88° 08’ 24” + 6”,92 => Z2c = 88° 08’ 30”,92

△H = - 551,93 m.

Altura Auxiliar sin compensar

4.807,88 – 551,93 => **H2 = 4255,95 m.**

Auxiliar	Quebrada Honda
Z1 =88° 39’ 50””	Z2 = 91° 32’ 51”
i = 1,45m.	i2 = 1,40 m.
b2 = 2,05 m.	b1 = 1,32 m.
Di = 25.168,32 m.	
Hi= 4.255,95 m.	

$$\theta”1 = +4",92$$
$$\theta”2 = -0",66$$

Z1c= 88° 39’ 54”,92

Z2c = 91° 32’ 50”,34

△H = + 632,93 m.

Altura de cierre en Quebrada Honda sin compensar

4.255,95 + 632,93 => **H2 = 4.888,88** m.

Comprobación de cierre

Altura Fija Quebrada Honda = 4.891,6 m.

Altura de cálculo Quebrada Honda = 4.888,88 m.

Error de cierre en altura = - 2,7 metros

$Tolerancia\ de\ Cierre\ en\ altura = 0{,}4 * \sqrt{\sum Di}$ m.

Σ Di en kilómetros

Σ Di = 55.531,17 metros = 55,53117 Km.

Tolerancia = +/- 2,98 metros

En consecuencia el error de cierre se encuentra dentro de la tolerancia exigida y luego se puede compensar o ajustar la poligonal.

La corrección se realiza en función de la distancia recorrida, se asume que el error aumenta en función del desplazamiento de la poligonal.

Se calculará un factor (Fc) en función del error de cierre y la distancia recorrida para luego aplicarlo en cada estación en función de la distancia, que la poligonal ha recorrido.

Fc = Error de cierre/ Σ Di

Corrección en Parinas = Fc * Distancia de Portezuelo León a Parinas

Corrección a Auxiliar = Fc* (distancia de Portezuelo león a Parinas + distancia de Parinas a Auxiliar)

Corrección a Quebrada Honda = Fc * Σ Di

Fc = 2,7 m./ 55.531,17 m. => Fc = 0,000048621

Corrección a Parinas = + 0,68 metros

Corrección a Auxiliar = + 1,48 metros

Corrección a Quebrada Honda = + 2,7 metros

Parinas = 4.807,88 + 0 68

Auxiliar = 4.255,95 + 1,48 metros

Quebrada Honda = 4.888,90 +2,7 metros

Cotas Compensadas de la poligonal

Portezuelo León = 4.704,4 metros (punto de coordenadas y cota fija

Parinas = 4.808,56 metros

Auxiliar = 4.257,43 metros

Quebrada Honda = 4.891,60 metros (punto de coordenadas y cota fija)

CIERRE ANGULAR DE LA POLIGONAL

A.- Calculo del Exceso esférico de la Poligonal

Para el cálculo del exceso esférico de la poligonal, cerraremos la figura como si fuera plana, y consideraremos un valor plano arbitrario en un punto de la poligonal, esto nos permitirá calcular las coordenadas planas de los restantes punto de la poligonal para finalmente determinar el valor de la superficie de la figura.

Para determinar los radios de curvatura se considerar un valor de latitud medio entre los puntos Quebrada Honda y Portezuelo León. Como la figura no es muy grande se podría considerar tomar la latitud de uno de los puntos antes señalados y la precisión en el cálculo no variará en forma significativa. La orientación también puede ser tomada en forma arbitraria.

Latitud media = (Latitud de León + latitud de Quebrada Honda)/2
Latitud media = 68° 20’ 12”,495

Estación	Angulo sin compensar	Angulo compensado como figura plana
Portezuelo León	183° 23’ 18”,8	**183° 23’ 24”,26**
Parinas	61° 48’ 37”,6	**61° 48’ 43”,06**
Auxiliar	167° 14’ 18”,5	**167° 14’ 23”,96**
Quebrada Honda	55° 23’ 56”,9	**55° 24’ 02”,36**
Meseta Colorada	72° 09’ 20”,9	**72° 09’ 26”,36**
Sumatoria	539° 59’ 32”,7	**540° 00’ 00”,00**
Error de cierre figura plana	- 27”,3	
Corrección angular	+ 5,”46	

Si el acimut considerado es de 281° 19’ 00” (valor arbitrario) desde Portezuelo León a Parinas, desde el norte. A Portezuelo León se le asigna un valor de coordenadas planas X,Y de 500.000 – 500.000.

- **Portezuelo León a Parinas**, distancia inclinada = 13.967,59 m.

△H = 104,16 m.

α = 281° 19' 00"

$$DH = \sqrt{(Di^2) - (\triangle H^2)}$$

DH= 13.967,201 m.

Radio Acimutal

$$R\alpha = \frac{N\rho}{N\cos^2\alpha + \rho sen^2\alpha}$$

Considerando la latitud media adoptada para este cálculo 68° 20' 12",495, se tendrá:

Rα = 6.396.760,105 m.

$$Dnmm = DH - DH * \frac{Hm}{R\alpha}$$

Hm= 4.756,48

Dnmm= 13.956,815 m.

- **Parinas a Auxiliar**, distancia inclinada = 16.395,26 m.

△H = 551,13 m

DH = 16.385,994 m.

α = 39° 30' 16",94 (acimut plano)

Latitud media= 68° 20' 12",495

Rα = 6.393.476,803 m.

Hm= 4.532,995 m.

Dnmm= 16.374,376 m.

- **Auxiliar a Quebrada Honda**, distancia inclinada = 25.168,32 m.

△H = 634,17

DH= 25.160,329 m.

α = 52° 15’ 52”,98

Latitud media= 68° 20’ 12”,495

Rα = 6.394.778,138 m.

Hm= 4.574,515 m.

Dnmm= 25.142,330 m.

- Distancia Quebrada Honda a Meseta Colorada se calcula por el problema inverso:

S = 35.687,474 m.

- Distancia Meseta Colorada Portezuelo león se calcula por el problema Inverso:

S = 19.195,720 m.

- Acimut plano Quebrada Honda a Meseta Colorada:

α = 176° 51’ 50”,62

- Acimut Plano Meseta Colorada a Portezuelo León

α = 284° 42’ 24”,26

Calculo de coordenadas Planas Arbitrarias para calcular superficie

Xparinas = 486.314,5

Yparinas = 502.738,8

Xauxiliar = 496.731,0

Yauxiliar = 515.372,7

Xquebrada honda = 516.614,7
Yquebrada honda = 530.760,2

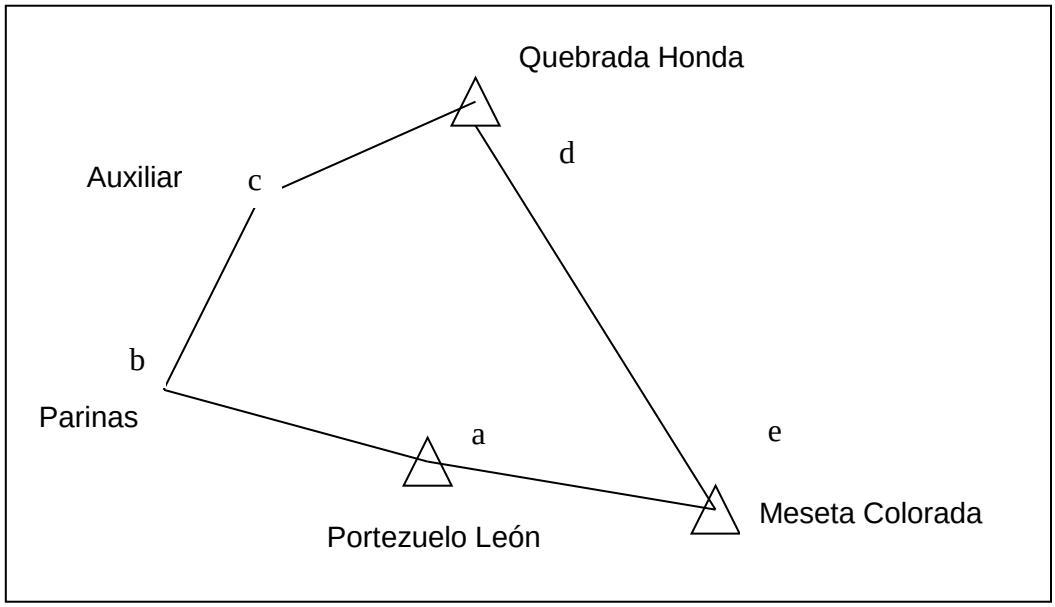
Xmeseta colorada = 516.614,7
Ymeseta colorada = 495.126,3

Xportezuelo león = 500.000,2
Yportezuelo león = 499.999,5

Los errores de cierre son menos de un metro, para este cálculo preliminar para obtener la superficie, este error no es un problema, por lo tanto, se mantienen estas coordenadas provisorias referidas a un plano local como suficientemente buenas, para el cálculo que se pretende realizar:

Fórmula de cálculo de superficie:

$$2 * \acute{a}rea = Xa * (Ye - Yb) + Xb * (Ya - Yc) + Xc * (Yb - Yc) + Xd * (Yc - Ye) + Xe * (Yd - Ya)$$



La superficie calculada da un valor de 205,6 Km^2

Exceso Esférico

Exceso = superficie (km^2)/(N*ρ* arc 1”)

Latitud media = 68° 20’ 12”,495

N = 6.396.987,29 m.

ρ = 6.391.092,72 m.

Exceso esférico = 1”,04

Se considera un valor de 1” para la corrección de los ángulos horizontales

Corrección angular definitiva

Estación	Angulos sin compensar	Angulo compensado Esférico
Portezuelo León	183° 23’ 18”,8	**183° 23’ 24”,46**
Parinas	61° 48’ 37”,6	**61° 48’ 43”,26**
Auxiliar	167° 14’ 18”,5	**167° 14’ 24”,16**
Quebrada Honda	55° 23’ 56”,9	**55° 24’ 02”,56**
Meseta Colorada	72° 09’ 20”,9	**72° 09’ 26”,56**
Sumatoria	539° 59’ 32”,7	**540° 00’ 01”**
Error de cierre figura plana	- 27”,3	
Exceso esférico	1”	
Error de cierre esférico	28”,3	
Corrección angular	+ 5”,66	

CALCULO DE POSICIONES GEOGRÁFICAS

Calculo de acimut Inverso de la línea portezuelo León – Meseta Colorada:

α= 284° 42’ 06”,06

Acimut Portezuelo León a Parinas = 284° 42’ 06”,06 - 183° 23’ 24”,46

α a Parinas = 101° 18’ 41”,60

Calculo de distancia geodésica de Portezuelo León a Parinas

△H = 104,16 m

Di=13.967,59 m

Hm= 4.756,48 m.

DH = 13.967,20 m.

α a Parinas = 101° 18’ 41”,60

Latitud de León = -25° 58’ 14”,54

R α = 6.381.160,49 m.

Dnmm = 13.956,79 m.

S = 13.956,79 m.

Calculo de posiciones geográficas de Parinas

Φ1 = -25° 58’ 14”,54 λ= -68° 25’ 10”,36

α a Parinas = 101° 18’ 41”,60

S = 13.956,79 m.

Φ Parinas = .- 25° 56’ 45”,354

λ Parinas = -68° 33’ 22”,22

△ α = + 215”,295 = 3’ 35”,295

Calculo Acimut de Parinas a Auxiliar

101° 18’ 41”,60 + 180° = 281° 18’ 41”,60

281° 18’ 41”,60 – 61° 48’ 43”,26 = 219° 29’ 58”,34

219° 29’ 58”,34 + 00° 03’ 35”,295 = 219° 33’ 33”,635

α a Auxiliar = 219° 33’ 33”,635

Calculo de distancia geodésica de Parinas a Auxiliar

△H = 551,13 m

Hm= 4.532,995 m.

Di = 16.395,26 m.

DH = 16.385,994 m.

R α =

Φ Parinas = .- 25° 56’ 45”,354

λ Parinas = -68° 33’ 22”,22

Dnmm = 16.374,31 m.

S = 16.374,31 m. (la corrección no fue significativa al centímetro, por lo cual no se adoptó y se mantuvo la DNMM)

Cálculo Posición Geográfica de Auxiliar

Φ Parinas = .- 25° 56’ 45”,354

λ Parinas = -68° 33’ 22”,22

α a Auxiliar = 219° 33’ 33”,635

Φ Auxiliar = - 25° 49’ 55”,010

λ Auxiliar = - 68° 27’ 07”,785

△ α = - 163”,489 = - 2’ 43”,489

Calculo Acimut de Auxiliar a Quebrada Honda

219° 33’ 33”,635 + 180° 00’ 00” = 399° 33’ 33”,635

399° 33’ 33”,635 – 167° 14’ 24”,160 = 232° 19’ 09”,475

232° 19’ 09”,475 - 00° 02’ 43”,489 = 232° 16’ 25”,986

α a Quebrada Honda = 232° 16’ 25”,986

Calculo de distancia Geodésica de Auxiliar a Quebrada Honda

△H = 634,17

DH= 25.160,329 m.

Hm= 4.574,515 m.

Di =25.168,32 m

Φ Auxiliar = - 25° 49’ 55”,010

λ Auxiliar = - 68° 27’ 07”,785

Dnmm =25142,26 m.

S = 25.142,28 m.

Calculo Posición Geográfica Quebrada Honda

Φ Auxiliar = - 25° 49’ 55”,010

λ Auxiliar = - 68° 27’ 07”,785

α a Quebrada Honda = 232° 16’ 25”,986

S = 25.142,28 m.

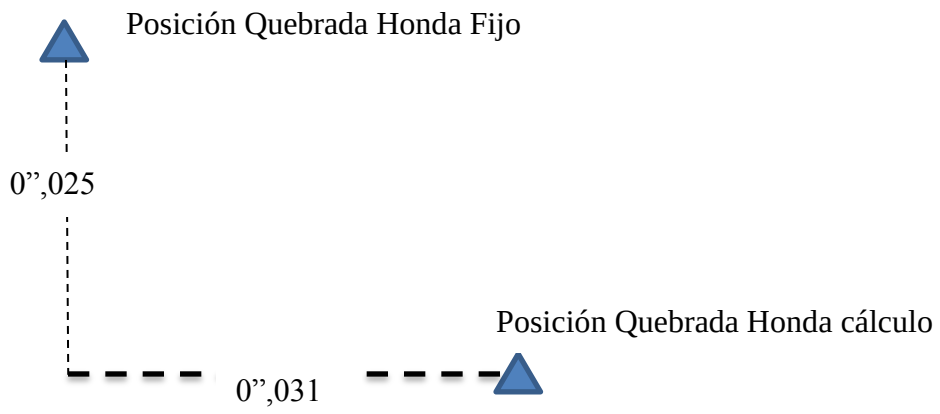
Φ Quebrada Honda = - 25° 41’ 34”,615

λ Quebrada Honda = - 68° 15’ 14”,599

△ α = - 309”,98

COMPENSACIÓN DE LA POLIGONAL

Estación de Control	Latitud	Longitud
Quebrada Honda (Fijo)	**-25° 41’ 34”,590**	**-68° 15’ 14”,630**
Quebrada Honda (Calculo)	-25° 41’ 34”,615	-68° 15’ 14”,599
Error de Cierre	- 0”,025	+ 0”,031



Efectuado el cálculo y el control del erro de cierre, se ha dibujado las posiciones que cada uno de los puntos tiene.

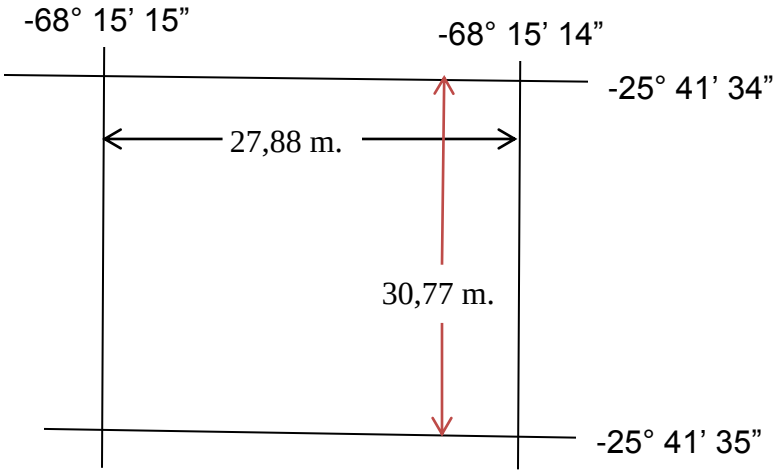
Para determinar el erro lineal que este error angular representa, se dibuja una cuadrícula de 1” de latitud por 1” de longitud y se calcula su valor lineal en el elipsoide que se ha adoptado y a la latitud en que se encuentra el punto de control y que incorpore tanto al punto de control como al punto generado por el cálculo que se obtuvo para el punto de control. En este caso se utilizará la longitud y latitud siguiente, en el elipsoide internacional de 1924 (Hayford):

Φ1 = -25° 41’ 34”

Φ2 = - 25° 41’ 35”

λ 1 = - 68° 15’ 14”

λ 2 = - 68° 15’ 15”



Error lineal en latitud = 0,025 * 30,77 = 0,77 metros

Error lineal en longitud = 0,031 * 27,88 = 0,86 metros

$$\text{Error de Posición} = \sqrt{(0{,}77^2)+(0{,}86^2)}$$

Error de Posición = +/- 1,15 metros

$$\text{Error de Escala} = \frac{1{,}15 \text{ m.}}{55.473{,}38 \text{ m.}}$$

Error de Escala 1:48.000 (aproximado)

Tolerancia para polígonos de tercer orden es de 1.20.000

Luego el error de escala es mucho más pequeño que la tolerancia, por lo tanto, la poligonal se puede compensar en posición. El ajuste se realizará en función de la distancia recorrida para asignar la corrección a cada estación.

Corrección en Latitud

Fc para latitud = 0”,025/55.473,38 m.

Fc latitud = 0,000000451 (segundo/metro)

Corrección Parina = Fc (seg/m.)* 13.956,79 m. = +0”,006

Corrección Auxiliar = Fc (seg/m.)* (13.956,79 + 16.374,31) = + 0”,014

Corrección Quebrada Honda = Fc (seg/m.)* 55.473,38 = + 0”,025

Corrección en Longitud

Fc = 0”,031/55.473,38 m

Fc = 0,000000559 (segundo/metro)

Corrección Parina = Fc (seg/m.)* 13.956,79 m = - 0”,008

Corrección Auxiliar = Fc (seg/m.)* (13.956,79 + 16.374,31) = - 0”,017

Corrección Quebrada Honda = Fc (seg/m.)* 55.473,38 = -0”,031

Estación	Latitud medida	Corrección	Latitud corregida
Parinas	-25° 56’ 45”,35	+ 0”,006	-25° 56’ 45”,34
Auxiliar	-25° 49’ 55”,01	+ 0”.014	-25° 49’ 55”,00
Quebrada Honda	-25° 41’ 34”,615	+ 0”,025	-25° 41’ 34”,59

Estación	Longitud medida	Corrección	Longitud corregida
Parinas	-68° 33’ 22”,22	-0”,008	-68° 33’ 22”,23
Auxiliar	-68° 27’ 07”,785	-0”,017	-68 27’ 07”,80
Quebrada Honda	-68° 15’ 14”,599	-0”,031	-68° 15’ 14”,63

Estación	**Latitud**	**Longitud**	**Cota (m.)**
Portezuelo León	-25° 58’ 14”,54	-68° 25’ 10”,36	4.704,4
Parinas	-25° 56’ 45”,34	-68° 33’ 22”,23	4808,56
Auxiliar	-25° 49’ 55”,00	-68 27’ 07”,80	4257,43
Quebrada Honda	-25° 41’ 34”,59	-68° 15’ 14”,63	4.891,60

BIBLIOGRAFÍA

1.- Bomford G. , “Geodesy”, Third Edition, 1971. Oxford University Press, London.

2.- Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999

3.- Department of the Army, “ Surveying Computer’s Manual”, Technical Manual TM5-237, Headquarter Department of the Army, USA, 1964.

4.- Fischer Irene, “ The Basic Framework of the South America Datum of 1969”, Pan American Institute of Geography and History, 1973.

5- Ivan I. Mueller,/Karl Ramsayer, “ Introduction to Surveying”, Frederick Vugon Publishing Co., New York, USA, 1979.

6.- Larson Roland, “Calculo y Geometría Analítica”, Volumen 2, 5ª Edición, McGraw-Hill/ Interamericana de España S.A., impresa en Madrid, España, 1995.

7- Martin Asin Fernando, “ Geodesia y Cartografía Matemática”, Instituto Geográfico Nacional, 3ª Edición, Madrid, España, 1990.

8.- Morales Ruiz Mario, “ Manual de Geodesia y Topografía”, Proyecto Sur de ediciones S.L., 2ª Edición, 1998, Granada, España.

9- Rapp Richard H. “ Geodesia Geométrica”, Volumen I, Departamento de Ciencias Geodésicas, Universidad Estatal de Ohio, USA, 1980.

10.- Saavedra Achurra Matías, Cálculos Geodésicos de Campo”, Central de Apuntes de la Universidad de Santiago de Chile, 1994.

11.- Saavedra Achurra Matías , " Programación Aplicada a la Geodesia", Proyecto de Mejoramiento de la Docencia, Vicerrectoria Académica, Universidad Tecnológica Metropolitana, Chile, 2000.

12.- Zakatov P. S, " Curso de Geodesia Superior". Editorial MIR, , Ediciones Alcala, Madrid, España, 1988.