

## **CALCULO DE ALTURAS**

### **DOCUMENTO TÉCNICO SOBRE O SISTEMA DE REFERÊNCIA**

**VERTICAL PARA A AMÉRICA DO SUL** (preparado por Hermann Drewes, Laura Sánchez, Denizar Blitzkow e Silvio Freitas em 1998)

La reciente determinación del dátum SIRGAS (Sistema de Referencia Geocéntrico para América del Sur), garantiza la solución de las discrepancias existentes entre los diferentes marcos geodésicos nacionales. Su principal ventaja radica en que se constituye en una plataforma común de referencia horizontal. Sin embargo, la disparidad persiste al comparar la posición vertical entre países vecinos. Esta circunstancia obliga que, al mantenimiento de SIRGAS, sea adicionada la definición de un sistema vertical que satisfaga no sólo las demandas de la representación cartográfica, sino también las exigencias del control geodésico actual y la homogeneización de este tipo de información a nivel internacional. Este nuevo sistema debe obedecer a una combinación consistente de las alturas niveladas establecidas, los datos de gravedad registrados y las alturas elipsoidales obtenidas mediante los levantamientos GPS, sin descuidar la normalización que un modelo geoidal gravimétrico les impone. Su determinación considera cuatro aspectos fundamentales: Definición del tipo de alturas que conforman su estructura, determinación del nivel básico al que están referidas dichas alturas, materialización de éstas mediante la realización de un marco de referencia y, finalmente, su cambio a través del tiempo.

Considerando lo expuesto y, dentro del contexto de la Resolución No. 4 del Grupo de Trabajo III de SIRGAS, en este documento se hace una exposición de los conceptos físicos y geométricos involucrados en la definición de alturas, su plataforma de referencia y la solución más conveniente para cualificar el marco geodésico vigente en América del Sur.

## **I. Tipos de alturas**

La altura de un punto sobre la superficie terrestre es la distancia existente, sobre la línea vertical, entre éste y una superficie de referencia (dátum vertical). Su determinación se realiza mediante un procedimiento conocido como nivelación, el cual, a su vez, puede ser barométrico, trigonométrico, geométrico o espacial. Sin embargo, debido a la influencia del campo de gravedad terrestre en el proceso de medición, los resultados obtenidos deben ser cualificados involucrando correcciones gravimétricas.

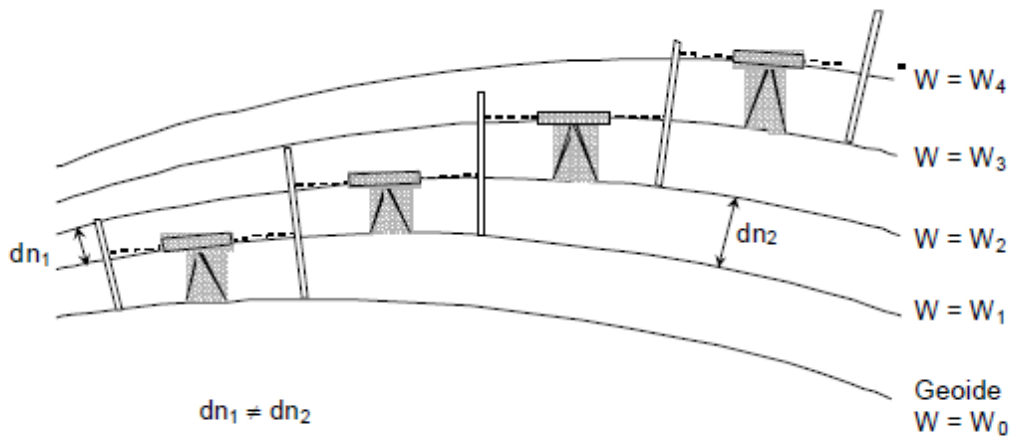
En el proceso convencional de determinación de alturas, el telescopio del instrumento es tangente a la superficie equipotencial local y la línea de la plomada coincide con el vector de la fuerza de gravedad, el cual es perpendicular a aquellas superficies. De aquí, las diferencias de nivel calculadas no solo reflejan las variaciones topográficas del terreno, sino que además consideran las alteraciones gravitacionales de la Tierra. La desviación que estas alteraciones generan sobre las alturas medidas pueden ser cuantificadas y tratadas de acuerdo con los conceptos físicos considerados en su procesamiento. Así, las alturas utilizadas en Geodesia se clasifican según su determinación, su aplicación y el modelo matemático o físico considerado en su definición. Dentro de este marco, se distinguen alturas de tipo geométrico (niveladas y elipsoidales) y alturas de tipo físico (dinámicas, normales y ortométricas).

### **1. Alturas de tipo geométrico**

#### **1.1 Alturas niveladas**

Son las obtenidas bajo el proceso de nivelación geométrica con métodos ópticos de medición (Figura 1). Las diferencias de nivel observadas varían de acuerdo con el campo de gravedad inherente al sitio en consideración.

Figura 1



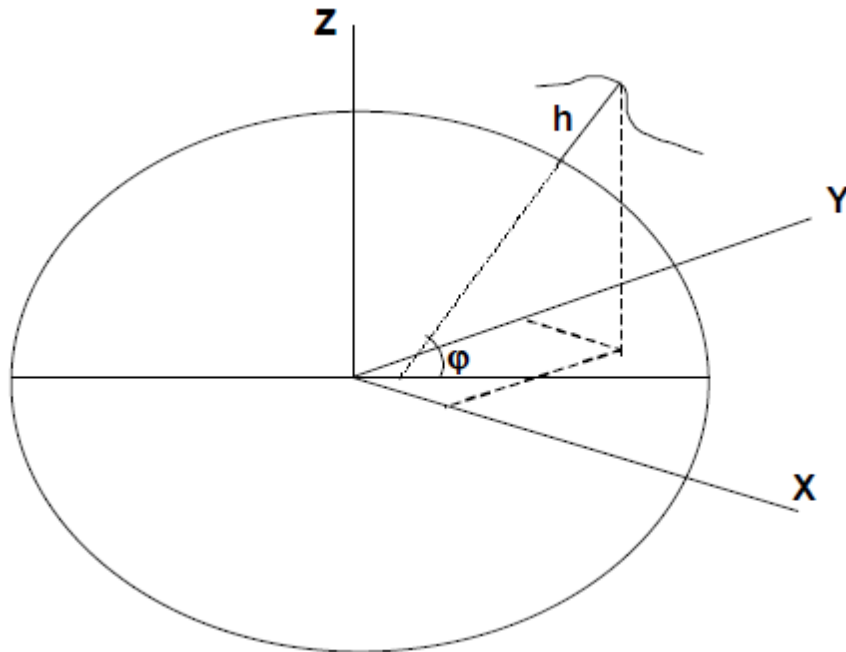
Las cantidades observadas ( $dn$ ) corresponden con la distancia existente entre las superficies equipotenciales del campo de gravedad terrestre y su sumatoria permite conocer la diferencia de altura entre los puntos de interés. No obstante, debido a la forma elipsoidal de la Tierra y a la distribución irregular de sus masas internas, las superficies equipotenciales no son equidistantes; los valores de desnivel entre éstas, varían de acuerdo con el trayecto de medición.

Como estas alturas dependen del camino descrito en el proceso de nivelación, fácilmente pueden obtenerse diferentes valores de altura para un mismo punto, haciendo que sean utilizadas en áreas pequeñas que no requieren considerar ni la figura elipsoidal de la Tierra ni las variaciones de su campo de gravedad. Su aplicación práctica es efectiva solo en redes locales con, aproximadamente, 10 km de extensión.

## 1.2 Alturas elipsoidales

Las alturas elipsoidales ( $h$ ) representan la separación entre la superficie topográfica terrestre y el elipsoide. Dicha separación se calcula sobre la línea perpendicular a este último. (Figura 2).

Figura 2: alturas elipsoidales



Las alturas elipsoidales son obtenidas a partir de las coordenadas geocéntricas cartesianas (X, Y, Z) definidas sobre un elipsoide de referencia (p. ej. el modelo Geodetic Reference System 1980, GRS80, o el World Geodetic System 1984, WGS84, los cuales, en la práctica, son iguales), y determinadas a partir del posicionamiento satelitario de los puntos de interés.

Debido a la utilización masiva de la técnica GPS, es indispensable considerar este tipo de alturas en los registros oficiales de las cantidades directamente medidas. Sin embargo, como éstas no consideran el campo de gravedad terrestre en su determinación, pueden presentar valores iguales en puntos con niveles diferentes, o viceversa, haciendo que su aplicación en la práctica sea mínima. Tal circunstancia exige que éstas sean complementadas con otro tipo que sí considere el campo de gravedad terrestre.

## 2. Alturas de tipo físico

Una manera de determinar las distancias reales entre las superficies de nivel es cuantificando sus diferencias de potencial, las cuales al ser sumadas en un circuito cerrado siempre serán cero y los resultados obtenidos, por diferentes trayectorias, serán iguales.

Esto debido a que los valores de potencial son unívocos y dependen solamente de la posición. En la práctica, estas diferencias corresponden con los resultados de las nivelaciones clásicas combinadas con los valores de gravedad registrados en la zona de interés. La diferencia de potencial entre cada punto de cálculo y el geoide (principal superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre) se conoce como número geopotencial:

$$\int_0^A g \, dn = W_0 - W_A = C \quad (1)$$

Siendo  $g$  la gravedad observada en el punto de cálculo,  $dn$  diferencial en altura,  $W_0$  el potencial sobre el geoide y  $W_A$  el potencial sobre la superficie que pasa por el punto de cálculo. La dimensión de los números geopotenciales es  $[m^2/s^2]$ , la cual no representa una longitud, haciendo que su utilización en la práctica no sea conveniente. Estos números pueden ser expresados en unidades de distancia al ser divididos por algún valor convencional de gravedad (2)

$$\text{altura } (H) = \frac{\text{número geopotencial } (C)}{\text{valor de gravedad } (G)} \quad (2)$$

En (2) *valor de gravedad G, número geopotencial C, altura H.*

La clase de altura (H) obtenida al resolver la expresión 2, dependerá del tipo de gravedad (G) incluida. Si G corresponde con el valor medio de gravedad teórica (normal) entre la estación y la superficie de referencia, la altura calculada será normal. Mientras que, si G equivale a un valor constante de gravedad teórica para un punto arbitrario, H es conocida como altura dinámica. Finalmente, si G es igual al valor medio de gravedad real entre el geoide y la estación evaluada, la altura estimada es llamada ortométrica.

## 2.1 Alturas dinámicas

Las alturas dinámicas se calculan al dividir los números geopotenciales por un valor constante de gravedad ( $\gamma_{cte}$ ):

$$H_{(din)} = \frac{C}{\gamma_{cte}} \quad (3)$$

La ventaja de las alturas dinámicas radica en que, valores iguales de éstas representan una superficie equipotencial del campo de gravedad, es decir; una superficie de agua en calma en cualquier elevación sobre el geoide tiene siempre la misma altura dinámica. Estas alturas se obtienen a partir de las niveladas, mediante la aplicación de correcciones que expresan los incrementos o decrementos, en altura, generados por involucrar un valor constante de gravedad.

La principal desventaja de este tipo de alturas está en que, por causa de la convergencia de las superficies equipotenciales (especialmente en dirección norte-sur, figura 1) la distancia geométrica entre ellas varía ostensiblemente ( $5 \times 10^{-3}$  unidades del ecuador a los polos), sin alterarse su altura dinámica. Por ejemplo, si se consideran dos superficies equipotenciales, cuya distancia geométrica es de 100 m en el ecuador, su equivalencia en los polos será de 99,5 m, mientras que, su altura dinámica siempre será constante.

## 2.2 Alturas normales

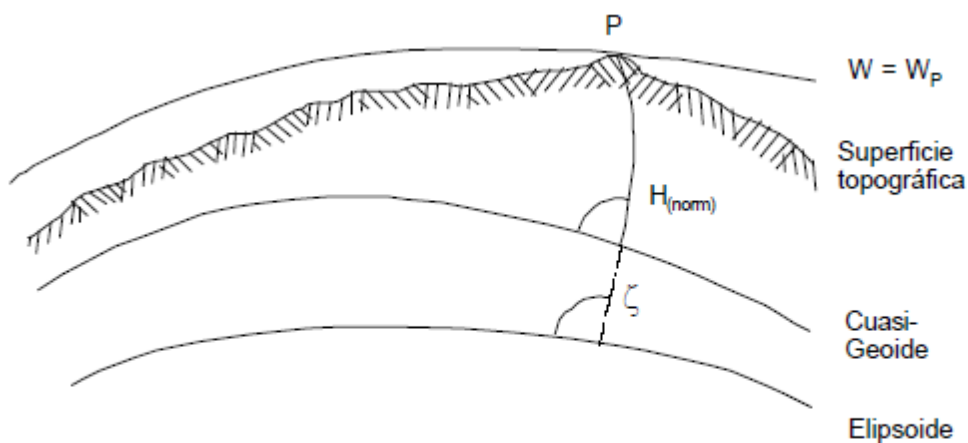
En las alturas normales los números geopotenciales no son divididos por un valor constante de gravedad (como en la ecuación 3) sino, por el valor medio de la gravedad normal entre la superficie de referencia (denominada cuasi-geoide) y el punto en consideración ( $\gamma'$ ) (Figura 3):

$$H_{(norm)} = \frac{C}{\gamma'} \quad (4)$$

$\gamma'$  se obtiene a partir de la fórmula de la gravedad normal terrestre, la cual está sólo en función de la latitud geográfica del punto y es generada por el elipsoide de referencia utilizado.

Las correcciones normales que se aplican a las alturas niveladas son más pequeñas que las de las alturas dinámicas, ya que  $\gamma'$  se obtiene a partir de la fórmula de la gravedad normal terrestre, la cual está sólo en función de la latitud geográfica del punto y es generada por el elipsoide de referencia utilizado.

Figura 3: Alturas normales



De acuerdo con lo expuesto, estas alturas pueden obtenerse a partir de las elipsoidales si se les descuenta la ondulación del cuasi-geoide, la cual es conocida como anomalía de altura o altura anómala ( $\zeta$ ):

$$H_{(norm)} = h - \zeta \quad (5)$$

### 2.3 Alturas ortométricas

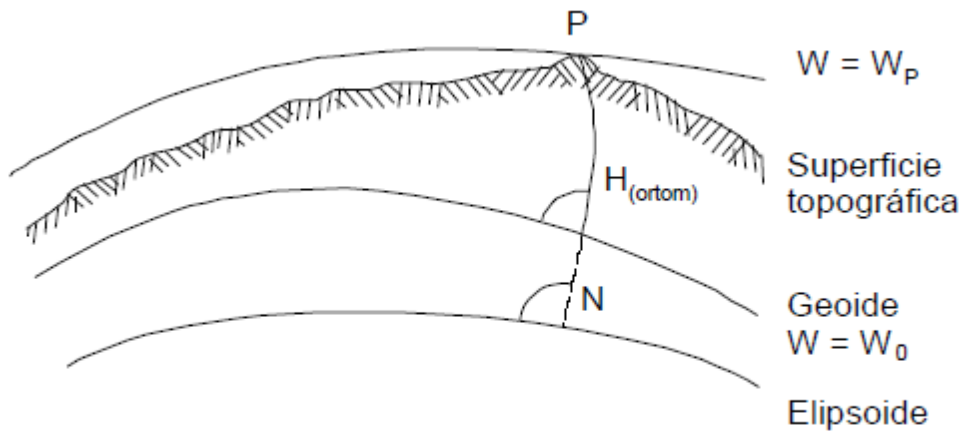
El cálculo de las alturas ortométricas es similar al de las normales, sólo que los números geopotenciales son divididos por el valor medio de la gravedad verdadera ( $g'$ ) entre el punto evaluado y el geoide. (Figura 4).

$$H_{(ortom)} = \frac{C}{g'} \quad (6)$$

El inconveniente que presentan estas alturas se basa en que no es posible conocer el valor de  $g'$ . Normalmente, la gravedad real es medida sobre la superficie topográfica y continuarla, hacia abajo, a lo largo de la línea de la plomada, requiere de la formulación de modelos sobre la distribución de densidad de las masas terrestres. De esta manera, los valores de altura ortométrica calculados dependen de las hipótesis utilizadas en el modelamiento de la densidad. Los métodos más comunes en la determinación de alturas ortométricas corresponden con las hipótesis de Helmert, Vignal, Baranov y Aire Libre (Free Air).



Figura 4: Alturas ortométricas



Las correcciones ortométricas aplicadas a las alturas niveladas están en el mismo orden que las utilizadas para la obtención de las normales. Sin embargo, la diferencia entre alturas ortométricas y normales (y con esto entre el geoide y el cuasi-geoide) depende de la discrepancia entre la gravedad verdadera modelada a través de alguna hipótesis y la gravedad normal, pudiéndose alcanzar valores de decímetros en estas diferencias. Las alturas ortométricas pueden obtenerse a partir de las elipsoidales mediante la sustracción de las ondulaciones geoidales  $N$ :

$$H_{(ortom)} = h - N \quad (7)$$

Tanto en la determinación de  $N$ , como en el cálculo de  $g'$  (ecuación 6) y en la estimación de las correcciones ortométricas, se requiere de una hipótesis sobre la distribución de densidades de las masas terrestres, lo cual; a pesar de ser la misma en los tres cálculos, no garantiza la obtención de un conjunto homogéneo de alturas ortométricas y dificulta su combinación con las alturas obtenidas a partir de las elipsoidales.

## II. Superficie de referencia para la definición de alturas

Toda nivelación clásica parte de un punto de referencia (dátum vertical), el cual es determinado mediante la observación del nivel del mar en largos períodos de tiempo y se asume coincidente con el geoide. Sin embargo, debido al dinamismo oceánico del planeta, el mar presenta diferentes niveles que dependen de la variación temporal de la superficie del mar (presión atmosférica, temperatura oceánica, etc.) y de la posición geográfica del mareógrafo (corrientes oceánicas, densidad del agua, etc.), lo que se traduce en diferencias de nivel de hasta dos metros entre varios mareógrafos.

Para superar los inconvenientes tácitos en la definición vertical sustentada por los mareógrafos, es necesario encontrar una superficie que constituya una referencia global, independiente del nivel del mar observado. El problema fundamental de la Geodesia es determinar la superficie equipotencial del campo de la gravedad terrestre que coincide (en primera aproximación) con el nivel medio del mar en completa calma. El comportamiento de dicha superficie depende de la caracterización que le asigna el campo de gravedad y su deformación causada por la existencia de masas internas de diferentes densidades. Su determinación, está sujeta a ciertas consideraciones teóricas que permiten tener en cuenta dos conceptos:

- a. Geoide: superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre. Su estimación requiere de la formulación de hipótesis sobre la distribución de las masas internas del planeta.
- b. Cuasi-geoide: superficie no equipotencial, muy cercana al geoide. Su determinación no requiere de hipótesis geofísicas, se basa en el modelamiento matemático del campo de gravedad normal.

A las alturas ortométricas les corresponde, como superficie de referencia, el geoide, mientras que a las normales, les corresponde el cuasi-geoide. En cuanto a

las alturas elipsoidales, éstas están referidas al modelo geométrico terrestre (elipsoide de revolución) considerado, el cual implícitamente está descrito por una superficie equipotencial normal obtenida a partir de formulaciones matemáticas ya establecidas.

### **III. Realización del marco de referencia vertical**

Una vez definido el tipo de alturas y su plataforma correspondiente, es necesario materializar este sistema mediante el establecimiento de un conjunto de estaciones (red básica) que constituyan el punto de partida para la propagación del control vertical. Dentro de este conjunto, deben considerarse los mareógrafos que sirven de base para el sistema altimétrico actual, logrando de esta manera, su vinculación al nuevo y manteniendo la vigencia de las alturas definidas por el método clásico.

Las estaciones que conforman la red vertical básica tienen que ser niveladas geoméricamente con corrección gravimétrica y estar definidas geodésicamente con posicionamiento GPS (Dátum SIRGAS). Estas características, Complementadas con la definición de un modelo geoidal (cuasi-geoidal) para Suramérica, permiten realizar el marco de referencia vertical.

### **IV. Mantenimiento del sistema vertical de referencia**

Al igual que la dinámica terrestre deforma las redes geodésicas horizontales, también altera las altimétricas. Los cambios en la posición vertical de la superficie topográfica se deben principalmente a:

- a. Mutación de la superficie de referencia (geoide o cuasi-geoide) como consecuencia de las modificaciones en la distribución de las masas internas terrestres, generadas por subducción, obducción, desplazamiento o choque de las placas tectónicas.

- b. Variación de la superficie de referencia por cambio del nivel medio del mar a través del tiempo, incluyendo deshielo polar y cambios en la temperatura oceánica.
- c. Los movimientos verticales resultantes de deformaciones corticales, de la acomodación de capas sedimentarias y modificaciones en el relieve topográfico.

Estos tres aspectos demandan del seguimiento continuo del marco de referencia vertical, con el propósito de establecer su variación y mantener la vigencia de las alturas definidas, mediante su actualización permanente.

## **V. Conclusiones y recomendaciones**

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, se recomienda que la definición del Sistema Vertical de Referencia para América del Sur se fundamente en dos tipos de alturas: las elipsoidales y las normales. Los argumentos se resumen en:

Las alturas elipsoidales son suficientes para definir un marco de referencia vertical preciso. No obstante, al ser esencialmente geométricas, éstas deben ser complementadas con un conjunto de alturas de tipo físico que permitan satisfacer las necesidades prácticas de los usuarios comunes.

Dentro de las alturas de tipo físico, se destacan las alturas normales y las ortométricas. Sin embargo, las normales se prefieren, ya que; a pesar de tener aplicación práctica similar a las ortométricas, en su determinación no se requiere de la formulación de hipótesis o modelos geofísicos de la densidad de las masas internas terrestres, facilitándose su evaluación a partir de los números geopotenciales y de la formulación matemática del campo de gravedad normal.

Las alturas normales utilizan como plataforma de referencia el cuasi-geoide, el cual se calcula normalmente por métodos gravimétricos y satelitales. Mientras

que, el geoide, superficie de referencia de las alturas ortométricas, demanda de la formulación de modelos geofísicos para su determinación, lo que se traduce en la variación de las alturas, cada vez que cambie la hipótesis de estimación.

Las alturas normales se obtienen más fácilmente, que las ortométricas, a partir de las mediciones GPS. Esto se debe a que, en la primera clase, las alturas elipsoidales son disminuidas por cantidades calculadas matemáticamente (alturas anómalas del cuasigeoide), mientras que en la segunda, deben considerarse valores derivados de hipótesis geofísicas (ondulaciones geoidales).

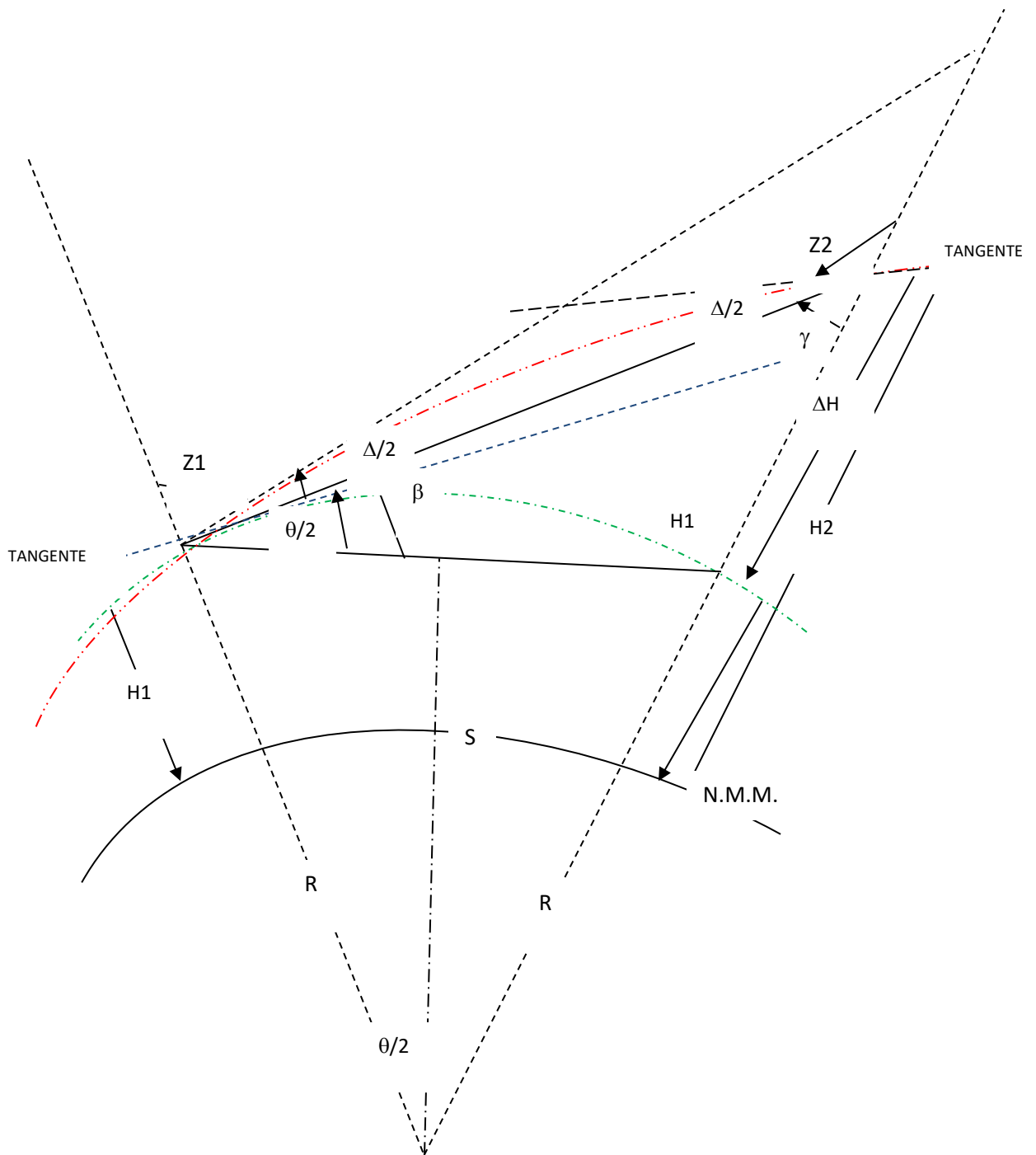
Las alturas normales facilitan la combinación de las obtenidas a partir del posicionamiento GPS y sus correspondientes, calculadas mediante la nivelación geométrica reducida a través de correcciones gravimétricas normales. Esta condición, garantiza una extensión más homogénea del control vertical en los diferentes países de América del Sur, sin descuidar la consistencia de un marco de referencia vertical único.

La superficie de referencia debe definirse de acuerdo con el tipo de alturas seleccionado, la cual, en este caso corresponde con el cuasi-geoide. Es conveniente que éste sea determinado de manera conjunta en todos los países de América del Sur.

Finalmente, con el propósito de vincular los sistemas clásicos de referencia vertical, es necesario determinar las alturas normales de los mareógrafos que constituyen los diferentes dátum. Para el efecto, deben combinarse rastreos GPS, altimetría satelital y alturas anómalas del modelo cuasi-geoidal.

# NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA GEODÉSICA

## CALCULO DE ALTURAS CON CENITALES RECIPROCOS



$$\Delta H = 2 * (R * H1) * \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} * \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma}$$

$$\beta = \frac{Z2 - Z1}{2}$$

$$\gamma = 90^\circ - \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{Z2 - Z1}{2} \right]$$

Reemplazando en la diferencia de altura, se tiene:

$$\Delta H = 2 * (R + H1) * \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} * \frac{\operatorname{sen} \left[ \frac{Z2 - Z1}{2} \right]}{\operatorname{sen} \left[ 90^\circ - \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{Z2 - Z1}{2} \right] \right]}$$

Dividiendo por:  $\cos \frac{\theta}{2} * \cos \frac{Z2 - Z1}{2}$ ; tanto el denominador como el numerador, se tiene finalmente

$$\Delta H = \frac{2 * (R + H1) * \tan \frac{\theta}{2} * \operatorname{tag} \frac{Z2 - Z1}{2}}{1 - \operatorname{tag} \frac{\theta}{2} * \operatorname{tag} \frac{Z2 - Z1}{2}}$$

Desarrollando la función tangente, se tiene:

$$\Delta H = \frac{2 * (R + H1) * \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\theta^3}{3} \right] * \operatorname{tag} \frac{Z2 - Z1}{2}}{1 - \operatorname{tag} \frac{\theta}{2} * \operatorname{tag} \frac{Z2 - Z1}{2}}$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{S}{2 * R}$$

Reemplazando, se tiene finalmente:

$$\Delta H = S * \operatorname{tang} \frac{Z2 - Z1}{2} * \left[ 1 + \frac{H1}{R} \right] * \left[ 1 + \frac{s * \operatorname{tang} \frac{Z2 - Z1}{2}}{2 * R} \right] * \left[ 1 + \frac{S^2}{12 * R^2} \right]$$

$R = R\alpha$

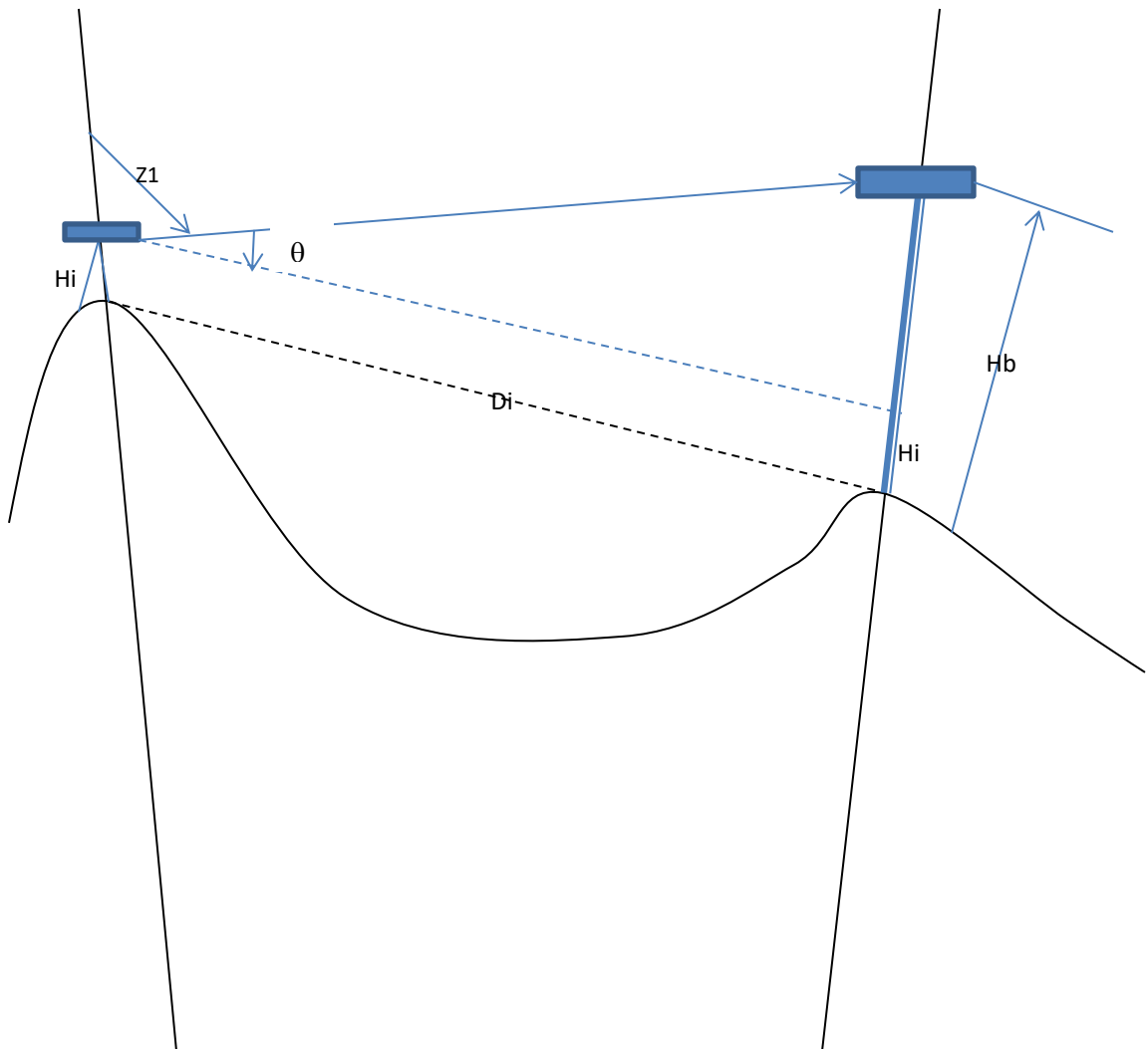
$R\alpha = \text{radio acimutal}$

$$\Delta H = S * \operatorname{tang} \frac{Z2 - Z1}{2} * A * B * C$$



## Reducción a la marca entre estaciones

Las mediciones de ángulos cenitales entre estaciones que se encuentran a grandes distancias generan que tanto las alturas instrumentales como las alturas de banderas o señales visadas son diferentes, por este motivo es necesario reducir estos ángulos a la marca en terreno.



$$\frac{\text{Sen } \theta}{(Hb - Hi)} = \frac{\text{Sen } Z1}{Di}$$

distancia inclinada

$$\theta'' = \frac{(Hb - Hi) * \text{sen} Z1}{Di * \text{arc } 1''}$$

Distancia geodésica

$$\theta'' = \frac{(Hb - Hi)}{S * \text{arc } 1''}$$

### EJERCICIO

Calcular la cota del punto B

**Estación A**

Z1= 93° 09' 00",42

Instrumento 1= 1,45 m.

Bandera B= 1,31 m.

Cota 4.610,4 m.

S= 12.991,527 m.

Rα = 6.367.792,0 m.

**Estación B**

Z2= 86° 56' 43",01

Instrumento 2= 1,42 m.

Bandera A = 4,00 m.

1.- Reducción a la línea entre estaciones

$$\theta_{ab} = \frac{4 - 1,45}{12991,527 * 4,848136811 * 10^{-6}}$$

$$\theta_{ba} = \frac{1,31 - 1,42}{12991,527 * 4,848136811 * 10^{-6}}$$

$$\theta_{ab} = +40'',49$$

$$\theta_{ba} = -1'',75$$

### Ángulos reducidos a la marca entre estaciones

$$Z1 \text{ Corregido} = 93^\circ 09' 00'',42 + 40'',49 = \mathbf{93^\circ 09' 40'',91}$$

$$Z2 \text{ Corregido} = 86^\circ 56' 43'',01 - 1'',75 = \mathbf{86^\circ 56' 41'',26}$$

### Calculo de cota del punto B

$$(Z2 - Z1) = -6^\circ 12' 59'',65$$

$$A = 1,000724019$$

$$B = 1,000055394$$

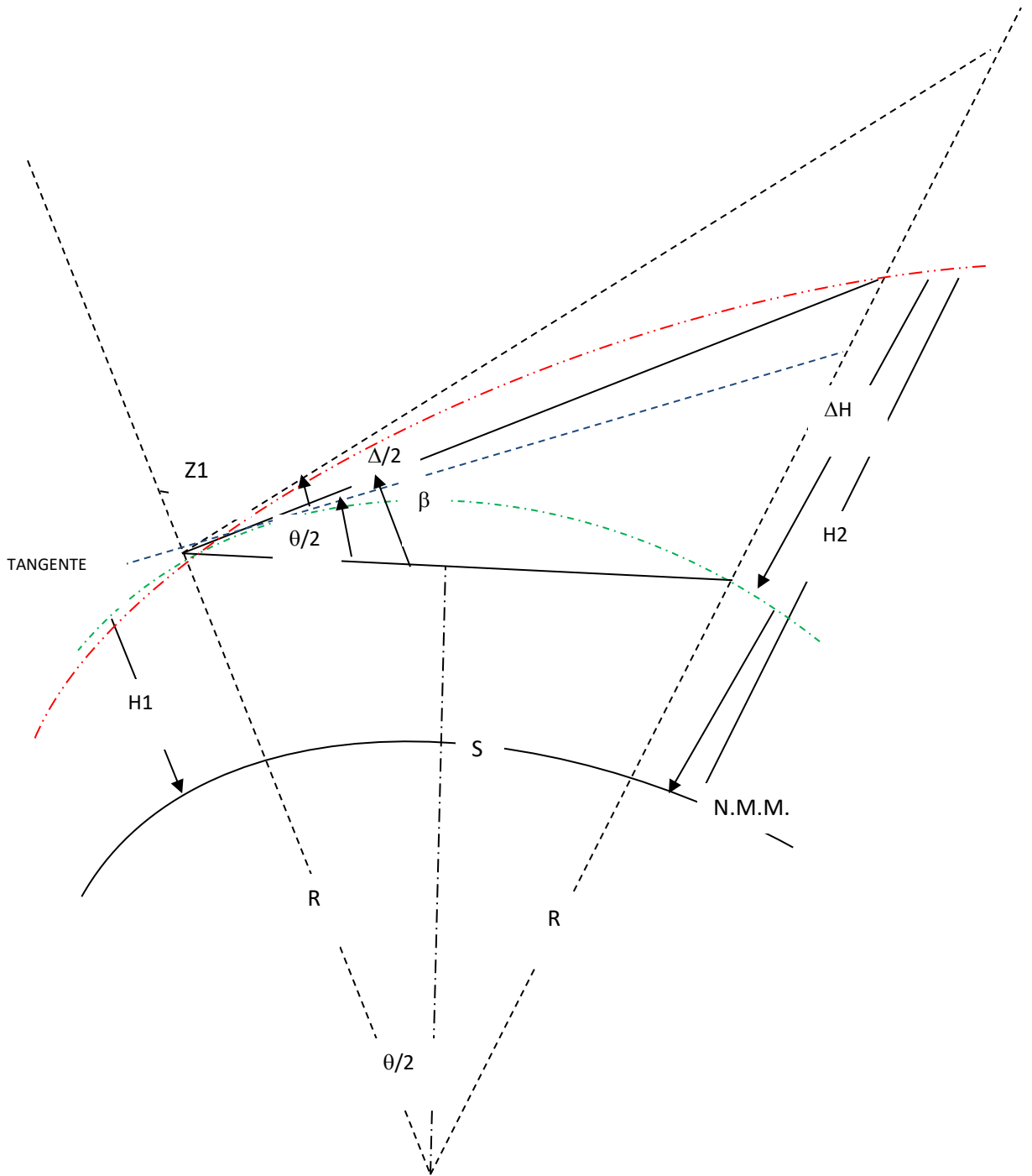
$$C = 1,000000347$$

$$A * B * C = 1,0007798$$

$$\Delta H = -706,03 \text{ m.}$$

$$\mathbf{Cota \text{ del punto B} = 4.610,4 - 706,03 = 3.904,37 \text{ metros}}$$

# CALCULO DE ALTURAS CON CENITALES NO RECIPROCOS



$$\Delta H = S * \text{tang}\beta$$

$$\beta = 90 + \frac{\theta}{2} - Z1 - \frac{\Delta}{2}$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{S}{2 * R\alpha}$$

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{S}{2 * R\alpha} * K$$

$K=2*m$  : refracción de la línea

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{S * m}{R\alpha}$$

$$\text{Tang } \beta = \text{tang} \left[ 90^\circ + \frac{S}{2 * R\alpha} - \frac{S * m}{R\alpha} - Z1 \right]$$

$$\Delta H = S * \text{tang} \left[ 90^\circ - Z1 + (0,5 - m) * \frac{S}{R\alpha * \text{arc } 1''} \right] + \text{Alt. Instrumento} - \text{alt. señal}$$

$$\Delta H = S * \text{tang}[90^\circ - Z1 + k] + \text{Alt. Inst} - \text{Alt. Señal}$$

$$k = (0,5 - m) * \frac{S}{R\alpha * \text{arc } 1''}$$

La experiencia en la medición de cenitales recíprocos ha demostrado que un buen valor de k, varía entre un valor promedio de 0,014 seg/metro y un valor máximo de 0,015 seg/m y un valor mínimo de 0,013 seg/m. Estos valores aseguran el nivel de confianza de una medición de cenitales, asegurando una buena calidad en el cálculo de alturas mediante nivelación trigonométrica, cuando la medición comprende distancias grandes entre estaciones.

## EJERCICIO

Se desea calcular la cota del punto C desde el punto A, en esta oportunidad no se han medido cenitales recíprocos.

### Estación A

$$Z1 = 89^{\circ} 00' 01''$$

$$\text{Alt Instr.} = 1,38 \text{ m.}$$

$$\text{Altura señal medida} = 4,00 \text{ m}$$

$$\text{Cota de A} = 4520,85 \text{ m.}$$

$$S = 9500,15 \text{ m.}$$

$$\Delta H = S * \text{tang}[90^{\circ} - Z1 + k] + \text{Alt. Inst} - \text{Alt. Señal}$$

k= consideraremos el valor promedio de 0,014 seg/m. al no tener un valor local de referencia

$$k = \frac{0,014 \text{ seg}}{m} * 9500,15 \text{ m}$$

$$K = 133'',00$$

$$90^{\circ} 00' 00''$$

$$02' 13''$$

$$\text{-----}$$
$$90^{\circ} 02' 13''$$

$$90^{\circ} 02' 13'' - 89^{\circ} 00' 01'' = 1^{\circ} 02' 12''$$

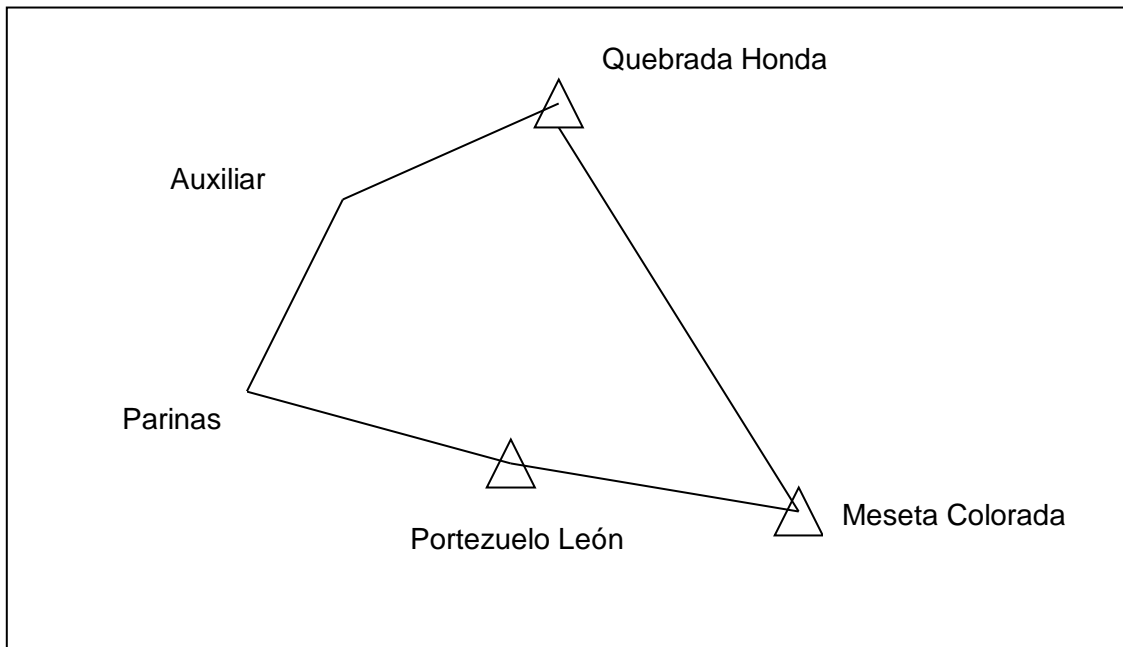
$$\Delta H = 9500,15 * \text{tang}[1^{\circ} 02' 12''] + 1,38 - 4,0$$

$$\Delta H = 169,29 \text{ metros}$$

$$\text{Cota C} = 4520,85 + 169,29$$

$$\text{Cota C} = 4690,14$$

## CALCULO DE UNA POLIGONAL GEODÉSICA



| Estación                  | Punto           | Ang Horizontal  | Ang. Vertical | Altura señal |
|---------------------------|-----------------|-----------------|---------------|--------------|
| Q. Honda<br>i=1,40 m.     | Meseta Colorada | 00° 00' 00"     |               |              |
|                           | Auxiliar        | 55° 23' 56,9 "  | 91° 32' 51 "  | 1,32 m.      |
| Auxiliar<br>i = 1,45 m.   | Quebrada Honda  | 00° 00' 00"     | 88° 39' 50 "  | 2,05 m.      |
|                           | Parinas         | 167° 14' 18,5"  | 88° 08' 24"   | 2,00 m.      |
| Parinas<br>i = 1,40       | Auxiliar        | 00° 00' 00"     | 92° 00' 04"   | 1,15 m.      |
|                           | Portezuelo León | 61° 48' 37,6"   | 90° 28' 38"   | 2,00 m.      |
| Port. León<br>i = 1,44 m. | Parinas         | 00° 00' 00"     | 89° 37' 52"   | 1,35 m.      |
|                           | Meseta Colorada | 183° 23' 18,8 " |               |              |
| Meseta Colorada           | Portezuelo León | 00° 00' 00"     |               |              |
|                           | Quebrada Honda  | 72° 09' 20,9 "  |               |              |

Distancias Inclinadas: Portezuelo León a Parinas= 13.967,59 m.

Parinas a Auxiliar = 16.395,26 m. // Auxiliar a Quebrada Honda = 25.168,32 m.

| Estación        | Latitud          | Longitud         | Cota (m.) |
|-----------------|------------------|------------------|-----------|
| Quebrada Honda  | - 25° 41' 34,59" | - 68° 15' 14,63" | 4891,6    |
| Portezuelo León | - 25° 58' 14,54" | - 68° 25' 10,36" | 4704,4    |
| Meseta Colorada | - 26° 00' 52,41" | - 68° 14' 02,67" |           |

Sistema Geodésico: PSAD-56 La Canoa (Elipsoide Internacional 1924 de Hayford)

**Calcular y Ajustar de las posiciones geográficas y cota de Parinas y Auxiliar**

**Calculo de Cotas**

| Portezuelo León   | Parinas          |
|-------------------|------------------|
| Z1 = 89° 37' 52"  | Z2 = 90° 28' 38" |
| i = 1,44 m.       | i2 = 1,40 m.     |
| b2 = 1,35 m.      | b1 = 2,00 m.     |
| Di = 13.967,59 m. |                  |
| Hi = 4.704,40 m.  |                  |

$$\theta''1 = \frac{(1,35 - 1,44)\text{sen } Z1}{13967,59 * \text{arc } 1''} = -1'',33$$

$$\theta''2 = \frac{(2 - 1,40)\text{sen } Z2}{13967,59 * \text{arc } 1''} = 8'',86$$

$$89^\circ 37' 52'' - 1'',33 \Rightarrow Z1c = 89^\circ 37' 50'',67$$

$$90^\circ 28' 38'' + 8'',86 \Rightarrow Z2c = 90^\circ 28' 46'',86$$

$$\Delta H = Di * \text{Sen} \left[ \frac{(Z2c - Z1c)}{2} \right] = +103,48 \text{ m.}$$

### Altura de Parinas sin compensar

$$4804,4 + 103,48 \Rightarrow \mathbf{H2 = 4807,88 \text{ metros}}$$

|         |          |
|---------|----------|
| Parinas | Auxiliar |
|---------|----------|



|                   |                  |
|-------------------|------------------|
| Z1 = 92° 00' 04"  | Z2 = 88° 08' 24" |
| i = 1,40 m.       | i2 = 1,45 m.     |
| b2 = 1,15 m.      | b1 = 2,00 m.     |
| Di = 16.395,26 m. |                  |
| Hi = 4.807,88 m.  |                  |

$$\theta''1 = -3'',14$$

$$\theta''2 = +6'',92$$

$$92^\circ 00' 04'' - 3'',14 \Rightarrow Z1c = 92^\circ 00' 00'',86$$

$$88^\circ 08' 24'' + 6'',92 \Rightarrow Z2c = 88^\circ 08' 30'',92$$

$$\Delta H = - 551,93 \text{ m.}$$

#### Altura Auxiliar sin compensar

$$4.807,88 - 551,93 \Rightarrow H2 = 4255,95 \text{ m.}$$

| Auxiliar          | Quebrada Honda   |
|-------------------|------------------|
| Z1 = 88° 39' 50"  | Z2 = 91° 32' 51" |
| i = 1,45m.        | i2 = 1,40 m.     |
| b2 = 2,05 m.      | b1 = 1,32 m.     |
| Di = 25.168,32 m. |                  |
| Hi = 4.255,95 m.  |                  |

$$\theta''1 = +4'',92$$

$$\theta''2 = -0'',66$$

$$Z1c = 88^\circ 39' 54'',92$$

$$Z2c = 91^\circ 32' 50'',34$$

$$\Delta H = + 632,93 \text{ m.}$$

#### Altura de cierre en Quebrada Honda sin compensar

$$4.255,95 + 632,93 \Rightarrow H2 = 4.888,88 \text{ m.}$$

### Comprobación de cierre

Altura Fija Quebrada Honda = 4.891,6 m.

Altura de cálculo Quebrada Honda = 4.888,88 m.

Error de cierre en altura = - 2,7 metros

*Tolerancia de Cierre en altura* =  $0,4 * \sqrt{\sum Di}$  m.

$\Sigma Di$  en kilómetros

$\Sigma Di = 55.531,17$  metros = 55,53117 Km.

Tolerancia = +/- 2,98 metros

En consecuencia el error de cierre se encuentra dentro de la tolerancia exigida y luego se puede compensar o ajustar la poligonal.

La corrección se realiza en función de la distancia recorrida, se asume que el error aumenta en función del desplazamiento de la poligonal.

Se calculará un factor (Fc) en función del error de cierre y la distancia recorrida para luego aplicarlo en cada estación en función de la distancia, que la poligonal ha recorrido.

$$Fc = \text{Error de cierre} / \Sigma Di$$

**Corrección en Parinas** =  $Fc * \text{Distancia de Portezuelo León a Parinas}$

**Corrección a Auxiliar** =  $Fc * (\text{distancia de Portezuelo león a Parinas} + \text{distancia de Parinas a Auxiliar})$

**Corrección a Quebrada Honda** =  $Fc * \Sigma Di$

$$Fc = 2,7 \text{ m.} / 55.531,17 \text{ m.} \Rightarrow Fc = 0,000048621$$

Corrección a Parinas = + 0,68 metros

Corrección a Auxiliar = + 1,48 metros

Corrección a Quebrada Honda = + 2,7 metros

Parinas = 4.807,88 + 0 68

Auxiliar = 4.255,95 + 1,48 metros

Quebrada Honda = 4.888,90 +2,7 metros

### **Cotas Compensadas de la poligonal**

Portezuelo León = 4.704,4 metros (punto de coordenadas y cota fija)

Parinas = 4.808,56 metros

Auxiliar = 4.257,43 metros

Quebrada Honda = 4.891,60 metros (punto de coordenadas y cota fija)

### **CIERRE ANGULAR DE LA POLIGONAL**

### A.- Calculo del Exceso esférico de la Poligonal

Para el cálculo del exceso esférico de la poligonal, cerraremos la figura como si fuera plana, y consideraremos un valor plano arbitrario en un punto de la poligonal, esto nos permitirá calcular las coordenadas planas de los restantes punto de la poligonal para finalmente determinar el valor de la superficie de la figura.

Para determinar los radios de curvatura se considerar un valor de latitud medio entre los puntos Quebrada Honda y Portezuelo León. Como la figura no es muy grande se podría considerar tomar la latitud de uno de los puntos antes señalados y la precisión en el cálculo no variará en forma significativa. La orientación también puede ser tomada en forma arbitraria.

$$\text{Latitud media} = (\text{Latitud de León} + \text{latitud de Quebrada Honda})/2$$

$$\text{Latitud media} = 68^\circ 20' 12'',495$$

| Estación                     | Angulo sin compensar | Angulo compensado como figura plana |
|------------------------------|----------------------|-------------------------------------|
| Portezuelo León              | 183° 23' 18",8       | <b>183° 23' 24",26</b>              |
| Parinas                      | 61° 48' 37",6        | <b>61° 48' 43",06</b>               |
| Auxiliar                     | 167° 14' 18",5       | <b>167° 14' 23",96</b>              |
| Quebrada Honda               | 55° 23' 56",9        | <b>55° 24' 02",36</b>               |
| Meseta Colorada              | 72° 09' 20",9        | <b>72° 09' 26",36</b>               |
| Sumatoria                    | 539° 59' 32",7       | <b>540° 00' 00",00</b>              |
| Error de cierre figura plana | - 27",3              |                                     |
| Corrección angular           | + 5",46              |                                     |

Si el acimut considerado es de 281° 19' 00" (valor arbitrario) desde Portezuelo León a Parinas, desde el norte. A Portezuelo León se le asigna un valor de coordenadas planas X,Y de 500.000 – 500.000.

- **Portezuelo León a Parinas**, distancia inclinada = 13.967,59 m.

$$\Delta H = 104,16 \text{ m.}$$

$$\alpha = 281^\circ 19' 00''$$

$$DH = \sqrt{(Di^2) - (\Delta H^2)}$$

$$DH = 13.967,201 \text{ m.}$$

Radio Acimutal

$$R\alpha = \frac{N\rho}{N \cos^2 \alpha + \rho \sin^2 \alpha}$$

Considerando la latitud media adoptada para este cálculo  $68^\circ 20' 12'',495$ , se tendrá:

$$R\alpha = 6.396.760,105 \text{ m.}$$

$$Dnmm = DH - DH * \frac{Hm}{R\alpha}$$

$$Hm = 4.756,48$$

$$Dnmm = 13.956,815 \text{ m.}$$

- **Parinas a Auxiliar**, distancia inclinada = 16.395,26 m.

$$\Delta H = 551,13 \text{ m}$$

$$DH = 16.385,994 \text{ m.}$$

$$\alpha = 39^\circ 30' 16'',94 \text{ (acimut plano)}$$

$$\text{Latitud media} = 68^\circ 20' 12'',495$$

$$R\alpha = 6.393.476,803 \text{ m.}$$

$$Hm = 4.532,995 \text{ m.}$$

$$Dnmm = 16.374,376 \text{ m.}$$

- **Auxiliar a Quebrada Honda**, distancia inclinada = 25.168,32 m.

$$\Delta H = 634,17$$

$$DH = 25.160,329 \text{ m.}$$

$$\alpha = 52^\circ 15' 52'',98$$

$$\text{Latitud media} = 68^\circ 20' 12'',495$$

$$R\alpha = 6.394.778,138 \text{ m.}$$

$$Hm = 4.574,515 \text{ m.}$$

$$\mathbf{Dnmm = 25.142,330 \text{ m.}}$$

- Distancia Quebrada Honda a Meseta Colorada se calcula por el problema inverso:

$$S = 35.687,474 \text{ m.}$$

- Distancia Meseta Colorada Portezuelo León se calcula por el problema Inverso:

$$S = 19.195,720 \text{ m.}$$

- Acimut plano Quebrada Honda a Meseta Colorada:

$$\alpha = 176^\circ 51' 50'',62$$

- Acimut Plano Meseta Colorada a Portezuelo León

$$\alpha = 284^\circ 42' 24'',26$$

Calculo de coordenadas Planas Arbitrarias para calcular superficie

$$X_{\text{parinas}} = 486.314,5$$

$$Y_{\text{parinas}} = 502.738,8$$

$$X_{\text{auxiliar}} = 496.731,0$$

$$Y_{\text{auxiliar}} = 515.372,7$$

$$X_{\text{quebrada honda}} = 516.614,7$$

Yquebrada honda = 530.760,2

Xmeseta colorada = 516.614,7

Ymeseta colorada = 495.126,3

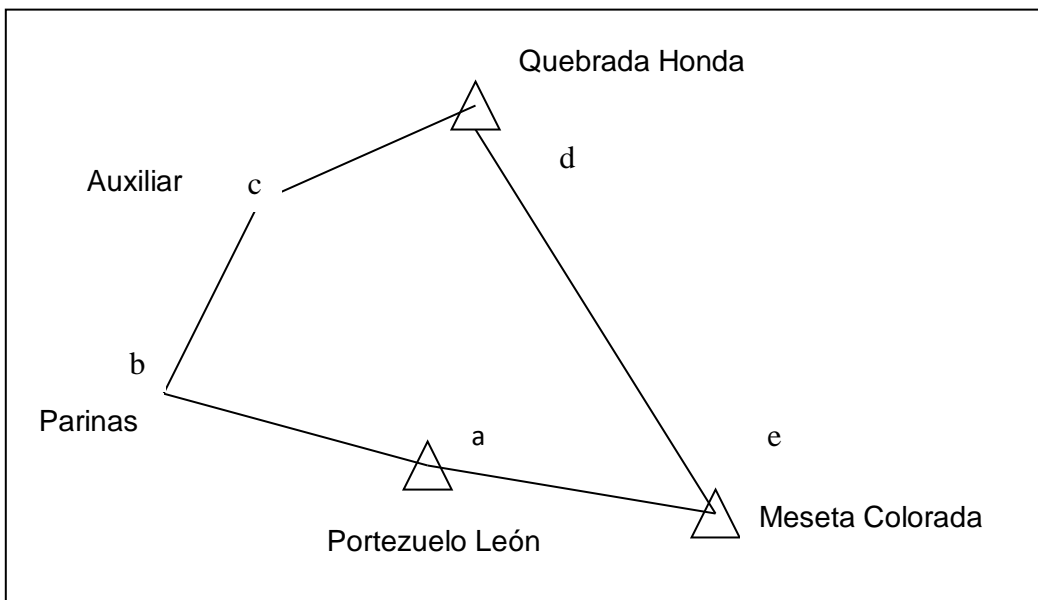
Xportezuelo león = 500.000,2

Yportezuelo león = 499.999,5

Los errores de cierre son menos de un metro, para este cálculo preliminar para obtener la superficie, este error no es un problema, por lo tanto, se mantienen estas coordenadas provisionarias referidas a un plano local como suficientemente buenas, para el cálculo que se pretende realizar:

Fórmula de cálculo de superficie:

$$2 * \text{área} = Xa * (Ye - Yb) + Xb * (Ya - Yc) + Xc * (Yb - Yc) + Xd * (Yc - Ye) + Xe * (Yd - Ya)$$



La superficie calculada da un valor de 205,6 Km<sup>2</sup>

### Exceso Esférico

$$\text{Exceso} = \text{superficie (km}^2\text{)} / (\text{N} \cdot \rho \cdot \text{arc } 1'')$$

Latitud media = 68° 20' 12",495

N = 6.396.987,29 m.

$\rho$  = 6.391.092,72 m.

Exceso esférico = 1",04

Se considera un valor de 1" para la corrección de los ángulos horizontales

### Corrección angular definitiva

| Estación                     | Angulos sin compensar | Angulo compensado Esférico |
|------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| Portezuelo León              | 183° 23' 18",8        | <b>183° 23' 24",46</b>     |
| Parinas                      | 61° 48' 37",6         | <b>61° 48' 43",26</b>      |
| Auxiliar                     | 167° 14' 18",5        | <b>167° 14' 24",16</b>     |
| Quebrada Honda               | 55° 23' 56",9         | <b>55° 24' 02",56</b>      |
| Meseta Colorada              | 72° 09' 20",9         | <b>72° 09' 26",56</b>      |
| Sumatoria                    | 539° 59' 32",7        | <b>540° 00' 01"</b>        |
| Error de cierre figura plana | - 27",3               |                            |
| Exceso esférico              | 1"                    |                            |
| Error de cierre esférico     | 28",3                 |                            |
| Corrección angular           | + 5",66               |                            |

## CALCULO DE POSICIONES GEOGRÁFICAS



### **Calculo de acimut Inverso de la línea portezuelo León – Meseta Colorada:**

$$\alpha = 284^{\circ} 42' 06'',06$$

$$\text{Acimut Portezuelo León a Parinas} = 284^{\circ} 42' 06'',06 - 183^{\circ} 23' 24'',46$$

$$\alpha \text{ a Parinas} = 101^{\circ} 18' 41'',60$$

### **Calculo de distancia geodésica de Portezuelo León a Parinas**

$$\Delta H = 104,16 \text{ m}$$

$$D_i = 13.967,59 \text{ m}$$

$$H_m = 4.756,48 \text{ m.}$$

$$D_H = 13.967,20 \text{ m.}$$

$$\alpha \text{ a Parinas} = 101^{\circ} 18' 41'',60$$

$$\text{Latitud de León} = -25^{\circ} 58' 14'',54$$

$$R \alpha = 6.381.160,49 \text{ m.}$$

$$D_{nmm} = 13.956,79 \text{ m.}$$

$$S = 13.956,79 \text{ m.}$$

### **Calculo de posiciones geográficas de Parinas**

$$\Phi_1 = -25^{\circ} 58' 14'',54 \quad \lambda = -68^{\circ} 25' 10'',36$$

$$\alpha \text{ a Parinas} = 101^{\circ} 18' 41'',60$$

$$S = 13.956,79 \text{ m.}$$

$$\Phi \text{ Parinas} = -25^{\circ} 56' 45'',354$$

$$\lambda \text{ Parinas} = -68^{\circ} 33' 22'',22$$

$$\Delta \alpha = +215'',295 = 3' 35'',295$$

### **Calculo Acimut de Parinas a Auxiliar**

$$101^{\circ} 18' 41'',60 + 180^{\circ} = 281^{\circ} 18' 41'',60$$

$$281^{\circ} 18' 41'',60 - 61^{\circ} 48' 43'',26 = 219^{\circ} 29' 58'',34$$

$$219^{\circ} 29' 58'',34 + 00^{\circ} 03' 35'',295 = 219^{\circ} 33' 33'',635$$

$$\alpha \text{ a Auxiliar} = 219^{\circ} 33' 33'',635$$

### Calculo de distancia geodésica de Parinas a Auxiliar

$$\Delta H = 551,13 \text{ m}$$

$$H_m = 4.532,995 \text{ m.}$$

$$D_i = 16.395,26 \text{ m.}$$

$$D_H = 16.385,994 \text{ m.}$$

$$R \alpha =$$

$$\Phi \text{ Parinas} = .- 25^{\circ} 56' 45'',354$$

$$\lambda \text{ Parinas} = -68^{\circ} 33' 22'',22$$

$$D_{nmm} = 16.374,31 \text{ m.}$$

$S = 16.374,31 \text{ m.}$  (la corrección no fue significativa al centímetro, por lo cual no se adoptó y se mantuvo la DNMM)

### Cálculo Posición Geográfica de Auxiliar

$$\Phi \text{ Parinas} = .- 25^{\circ} 56' 45'',354$$

$$\lambda \text{ Parinas} = -68^{\circ} 33' 22'',22$$

$$\alpha \text{ a Auxiliar} = 219^{\circ} 33' 33'',635$$

$$\Phi \text{ Auxiliar} = - 25^{\circ} 49' 55'',010$$

$$\lambda \text{ Auxiliar} = - 68^{\circ} 27' 07'',785$$

$$\Delta \alpha = - 163'',489 = - 2' 43'',489$$

### Calculo Acimut de Auxiliar a Quebrada Honda

$$219^{\circ} 33' 33'',635 + 180^{\circ} 00' 00'' = 399^{\circ} 33' 33'',635$$

$$399^{\circ} 33' 33'',635 - 167^{\circ} 14' 24'',160 = 232^{\circ} 19' 09'',475$$

$$232^{\circ} 19' 09'',475 - 00^{\circ} 02' 43'',489 = 232^{\circ} 16' 25'',986$$

$$\alpha \text{ a Quebrada Honda} = 232^{\circ} 16' 25'',986$$

### **Calculo de distancia Geodésica de Auxiliar a Quebrada Honda**

$$\Delta H = 634,17$$

$$DH = 25.160,329 \text{ m.}$$

$$Hm = 4.574,515 \text{ m.}$$

$$Di = 25.168,32 \text{ m}$$

$$\Phi \text{ Auxiliar} = - 25^{\circ} 49' 55'',010$$

$$\lambda \text{ Auxiliar} = - 68^{\circ} 27' 07'',785$$

$$Dnmm = 25142,26 \text{ m.}$$

$$\mathbf{S = 25.142,28 \text{ m.}}$$

### **Calculo Posición Geográfica Quebrada Honda**

$$\Phi \text{ Auxiliar} = - 25^{\circ} 49' 55'',010$$

$$\lambda \text{ Auxiliar} = - 68^{\circ} 27' 07'',785$$

$$\alpha \text{ a Quebrada Honda} = 232^{\circ} 16' 25'',986$$

$$S = 25.142,28 \text{ m.}$$

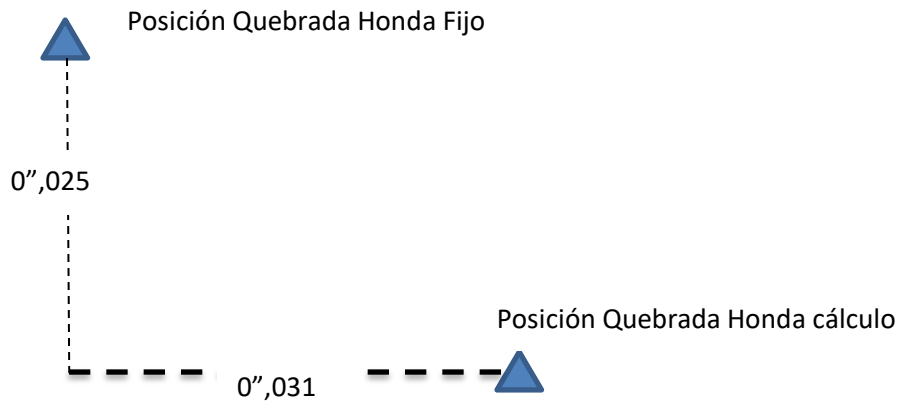
$$\mathbf{\Phi \text{ Quebrada Honda} = - 25^{\circ} 41' 34'',615}$$

$$\mathbf{\lambda \text{ Quebrada Honda} = - 68^{\circ} 15' 14'',599}$$

$$\mathbf{\Delta \alpha = - 309'',98}$$

## COMPENSACIÓN DE LA POLIGONAL

| Estación de Control          | Latitud                 | Longitud                |
|------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| <b>Quebrada Honda (Fijo)</b> | <b>-25° 41' 34",590</b> | <b>-68° 15' 14",630</b> |
| Quebrada Honda (Calculo)     | -25° 41' 34",615        | -68° 15' 14",599        |
| <b>Error de Cierre</b>       | <b>- 0",025</b>         | <b>+ 0",031</b>         |



Efectuado el cálculo y el control del erro de cierre, se ha dibujado las posiciones que cada uno de los puntos tiene.

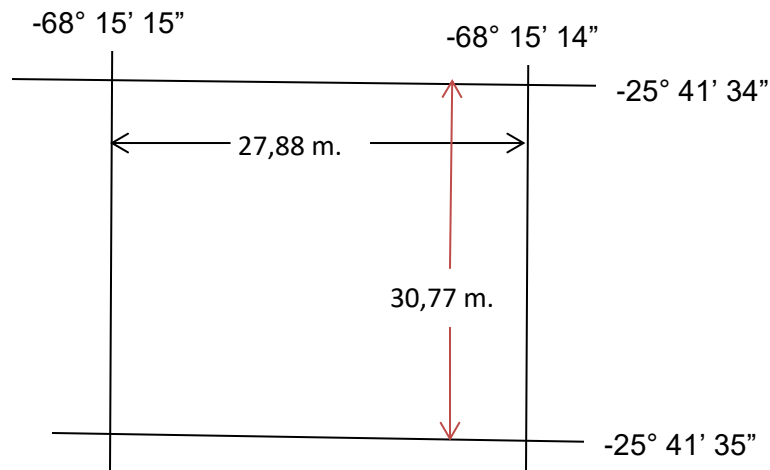
Para determinar el erro lineal que este error angular representa, se dibuja una cuadrícula de 1" de latitud por 1" de longitud y se calcula su valor lineal en el elipsoide que se ha adoptado y a la latitud en que se encuentra el punto de control y que incorpore tanto al punto de control como al punto generado por el cálculo que se obtuvo para el punto de control. En este caso se utilizará la longitud y latitud siguiente, en el elipsoide internacional de 1924 (Hayford):

$$\Phi 1 = -25^{\circ} 41' 34''$$

$$\Phi 2 = -25^{\circ} 41' 35''$$

$$\lambda 1 = -68^{\circ} 15' 14''$$

$$\lambda 2 = -68^{\circ} 15' 15''$$



Error lineal en latitud =  $0,025 * 30,77 = 0,77$  metros

Error lineal en longitud =  $0,031 * 27,88 = 0,86$  metros

$$\text{Error de Posición} = \sqrt{(0,77^2) + (0,86^2)}$$

Error de Posición = +/- 1,15 metros

$$\text{Error de Escala} = \frac{1,15 \text{ m.}}{55.473,38 \text{ m.}}$$

Error de Escala 1:48.000 (aproximado)

Tolerancia para polígonos de tercer orden es de 1.20.000

Luego el error de escala es mucho más pequeño que la tolerancia, por lo tanto, la poligonal se puede compensar en posición. El ajuste se realizará en función de la distancia recorrida para asignar la corrección a cada estación.

### Corrección en Latitud

Fc para latitud =  $0",025/55.473,38$  m.

Fc latitud = 0,000000451 (segundo/metro)

Corrección Parina = Fc (seg/m.) \* 13.956,79 m. = +0",006

Corrección Auxiliar = Fc (seg/m.) \* (13.956,79 + 16.374,31) = + 0",014

Corrección Quebrada Honda = Fc (seg/m.) \* 55.473,38 = + 0",025

### Corrección en Longitud

Fc =  $0",031/55.473,38$  m

Fc = 0,000000559 (segundo/metro)

Corrección Parina = Fc (seg/m.) \* 13.956,79 m = - 0",008

Corrección Auxiliar = Fc (seg/m.) \* (13.956,79 + 16.374,31) = - 0",017

Corrección Quebrada Honda = Fc (seg/m.) \* 55.473,38 = -0",031

| Estación       | Latitud medida   | Corrección | Latitud corregida |
|----------------|------------------|------------|-------------------|
| Parinas        | -25° 56' 45",35  | + 0",006   | -25° 56' 45",34   |
| Auxiliar       | -25° 49' 55",01  | + 0",014   | -25° 49' 55",00   |
| Quebrada Honda | -25° 41' 34",615 | + 0",025   | -25° 41' 34",59   |

| Estación       | Longitud medida  | Corrección | Longitud corregida |
|----------------|------------------|------------|--------------------|
| Parinas        | -68° 33' 22",22  | -0",008    | -68° 33' 22",23    |
| Auxiliar       | -68° 27' 07",785 | -0",017    | -68° 27' 07",80    |
| Quebrada Honda | -68° 15' 14",599 | -0",031    | -68° 15' 14",63    |

| Estación        | Latitud         | Longitud        | Cota (m.) |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------|
| Portezuelo León | -25° 58' 14",54 | -68° 25' 10",36 | 4.704,4   |
| Parinas         | -25° 56' 45",34 | -68° 33' 22",23 | 4808,56   |
| Auxiliar        | -25° 49' 55",00 | -68° 27' 07",80 | 4257,43   |
| Quebrada Honda  | -25° 41' 34",59 | -68° 15' 14",63 | 4.891,60  |

## BIBLIOGRAFÍA

- 1.- Bomford G. , “Geodesy”, Third Edition, 1971. Oxford University Press, London.
- 2.- Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, 1999
- 3.- Department of the Army, “ Surveying Computer’s Manual”, Technical Manual TM5-237, Headquarter Department of the Army, USA, 1964.
- 4.- Fischer Irene, “ The Basic Framework of the South America Datum of 1969”, Pan American Institute of Geography and History, 1973.
- 5.- Ivan I. Mueller,/Karl Ramsayer, “ Introduction to Surveying”, Frederick Vugon Publishing Co., New York, USA, 1979.
- 6.- Larson Roland, “Calculo y Geometría Analítica”, Volumen 2, 5ª Edición, McGraw-Hill/ Interamericana de España S.A., impresa en Madrid, España, 1995.
- 7.- Martin Asin Fernando, “ Geodesia y Cartografía Matemática”, Instituto Geográfico Nacional, 3ª Edición, Madrid, España, 1990.
- 8.- Morales Ruiz Mario, “ Manual de Geodesia y Topografía”, Proyecto Sur de ediciones S.L., 2ª Edición, 1998, Granada, España.
- 9.- Rapp Richard H. “ Geodesia Geométrica”, Volumen I, Departamento de Ciencias Geodésicas, Universidad Estatal de Ohio, USA, 1980.

- 10.- Saavedra Achurra Matías, "Cálculos Geodésicos de Campo", Central de Apuntes de la Universidad de Santiago de Chile, 1994.
- 11.- Saavedra Achurra Matías , " Programación Aplicada a la Geodesia", Proyecto de Mejoramiento de la Docencia, Vicerrectoría Académica, Universidad Tecnológica Metropolitana, Chile, 2000.
- 12.- Zakatov P. S, " Curso de Geodesia Superior". Editorial MIR, , Ediciones Alcala, Madrid, España, 1988.