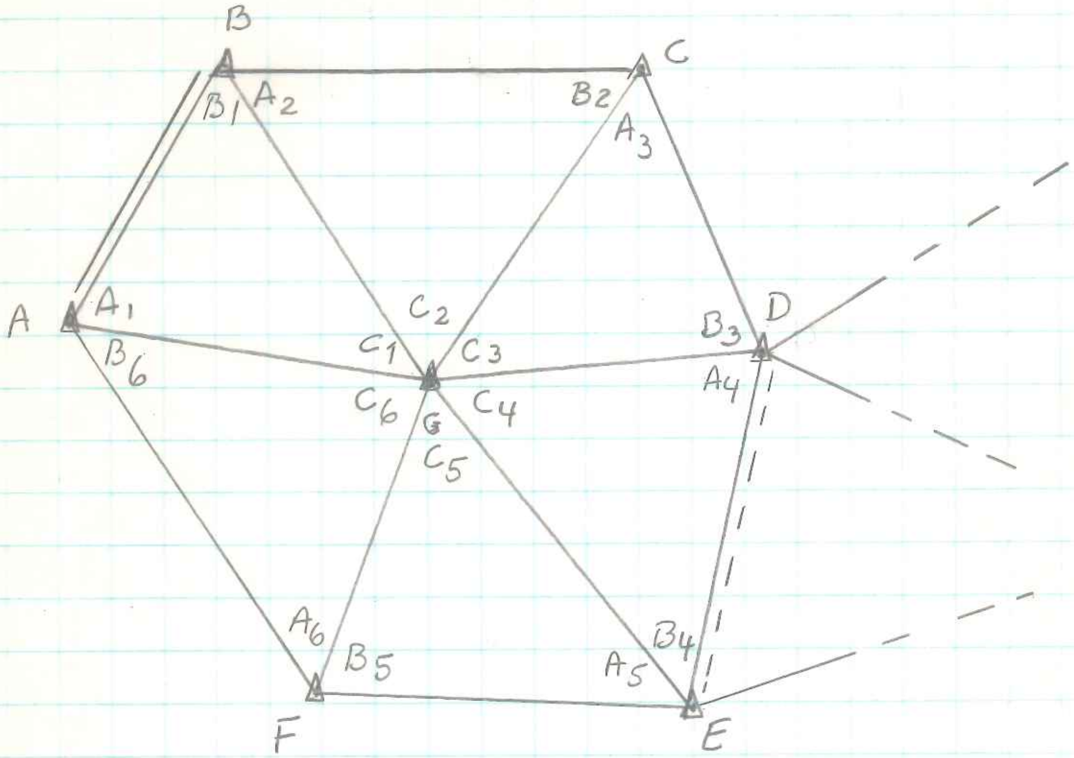
# COMPENSACION TOPOGRAFICA DE UNA MALLA CON PUNTO CENTRAL




Las condiciones que debe cumplir una malla con punto central son:

a) CONDICION DE TRIANGULO

b) CONDICION DE GIRO AL HORIZONTE

c) CONDICION DE LADO

En la figura A, B, C, D, E, F y G son los vértices de la malla.

$A_i$, $B_i$ y $C_i$; son los ángulos internos de la malla.

Supondremos que el lado Base es AB y el lado DE es el lado de conexión con otra malla.

## A) CONDICION DE TRIANGULO

Es necesario verificar que la suma de los ángulos interiores de cada triángulo de la malla sume 180° ó 200g

A.1.- Ecuaciones de condición:

$$A_1 + B_1 + C_1 = 180°$$
$$A_2 + B_2 + C_2 = 180°$$
$$A_3 + B_3 + C_3 = 180°$$
$$A_4 + B_4 + C_4 = 180°$$
$$A_5 + B_5 + C_5 = 180°$$
$$A_6 + B_6 + C_6 = 180°$$

A.2.- Como en cada triángulo se ha procedido a realizar la medición de cada uno de los ángulos, tendremos:

$$A'_1 + B'_1 + C'_1 = 180° + d_1$$

$$A'_2 + B'_2 + C'_2 = 180° + d_2$$

$$A'_3 + B'_3 + C'_3 = 180° + d_3$$

$$A'_4 + B'_4 + C'_4 = 180° + d_4$$

$$A'_5 + B'_5 + C'_5 = 180° + d_5$$

$$A'_6 + B'_6 + C'_6 = 180° + d_6$$

- $A'_i$, $B'_i$ y $C'_i$ ; son los ángulos medidos en terreno.
- $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$, $d_5$ y $d_6$ ; son los errores que se producen en cada uno de los respectivos triángulos de la malla.

A.3.- Para cada uno de los errores $\underline{d}$ existe una corrección d' de igual magnitud que $\underline{d}$ pero de signo contrario, esta corrección se divide por tres y se aplica a cada uno de los ángulos de los respectivos triángulos, quedando los ángulos compensados por condición de triángulo.

$$\left(A'_1+\frac{d'_1}{3}\right)+\left(B'_1+\frac{d'_1}{3}\right)+\left(C'+\frac{d'_1}{3}\right)=180^\circ$$

$$\left(A'_2+\frac{d'_2}{3}\right)+\left(B'_2+\frac{d'_2}{3}\right)+\left(C'_2+\frac{d'_2}{3}\right)=180^\circ$$

$$\left(A'_3+\frac{d'_3}{3}\right)+\left(B'_3+\frac{d'_3}{3}\right)+\left(C'_3+\frac{d'_3}{3}\right)=180^\circ$$

$$\left(A'_4+\frac{d'_4}{3}\right)+\left(B'_4+\frac{d'_4}{3}\right)+\left(C'_4+\frac{d'_4}{3}\right)=180^\circ$$

$$\left(A'_5+\frac{d'_5}{3}\right)+\left(B'_5+\frac{d'_5}{3}\right)+\left(C'_5+\frac{d'_5}{3}\right)=180^\circ$$

$$\left(A'_6+\frac{d'_6}{3}\right)+\left(B'_6+\frac{d'_6}{3}\right)+\left(C'_6+\frac{d'_6}{3}\right)=180^\circ$$

Si $A'' = A'_i + \frac{d'_i}{3}$, entonces tendremos que:

$$\begin{aligned}
A''_1 + B''_1 + C''_1 &= 180^\circ\\
A''_2 + B''_2 + C''_2 &= 180^\circ\\
A''_3 + B''_3 + C''_3 &= 180^\circ\\
A''_4 + B''_4 + C''_4 &= 180^\circ\\
A''_5 + B''_5 + C''_5 &= 180^\circ\\
A''_6 + B''_6 + C''_6 &= 180^\circ
\end{aligned}$$

Luego queda cumplida la Condición de Triángulo //

# B.- CONDICION DE GIRO AL HORIZONTE

Cumplida la Condición de Triángulo es necesario que se cumpla además la Condición de Giro al horizonte, para lo cual debe verificarse que la suma de los ángulos medidos en la estación del centro de la malla sumen 360° o 400 g.

B.1.- Ecuación de Condición:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 = 360° \ (400^g)$$

B.2.- Esta Ecuación de condición difícilmente puede cumplirse produciéndose un error.

$$C''_1 + C''_2 + C''_3 + C''_4 + C''_5 + C''_6 = 360° + k$$

B.3.- Para compensar esta ecuación es necesario encontrar una corrección $k'$ de igual magnitud que $k$ pero de signo contrario. Este valor de $k'$ se divide en 6 partes y se le suma cada una de las partes a los ángulos de esta condición.

$$\left(C''_1 + \frac{k'}{6}\right) + \left(C''_2 + \frac{k'}{6}\right) + \left(C''_3 + \frac{k'}{6}\right) + \left(C''_4 + \frac{k'}{6}\right) + \left(C''_5 + \frac{k'}{6}\right) + \left(C''_6 + \frac{k'}{6}\right) = 360°$$

Si $C'''_i = C''_i + \frac{k'}{6}$ ; entonces tendremos:

$$C'''_1 + C'''_2 + C'''_3 + C'''_4 + C'''_5 + C'''_6 = 360°$$

Quedando de esta forma cumplida la condición de Giro al horizonte. No obstante, al cumplirse esta condición se produce un error en la condición de triángulo, luego es necesario realizar una nueva compensación en la condición de triángulo pero que no altera la Condición de Giro al horizonte.

B. 4. - Para que la malla vuelva a cumplir la condición de Triángulo sin que se produzca desconexión en la Condición de Giro al horizonte, es necesario efectuar la siguiente compensación:

A los ángulos $A''_i$ y $B''_i$ se le aplica una corrección equivalente a $\frac{k''}{12}$, quedando de esta forma corregidos los ángulos y cumpliendo simultaneamente la condición de Triángulo y de Giro al Horizonte.

$$\left(A''_1 + \frac{k'}{12}\right) + \left(B''_1 + \frac{k'}{12}\right) + C'''_1 = 180°$$

$$\left(A''_2 + \frac{k'}{12}\right) + \left(B''_2 + \frac{k'}{12}\right) + C'''_2 = 180°$$

$$\left(A''_3 + \frac{k'}{12}\right) + \left(B''_3 + \frac{k'}{12}\right) + C'''_3 = 180°$$

$$\left(A''_4 + \frac{k'}{12}\right) + \left(B''_4 + \frac{k'}{12}\right) + C'''_4 = 180°$$

$$\left(A''_5 + \frac{k'}{12}\right) + \left(B''_5 + \frac{k'}{12}\right) + C'''_5 = 180°$$

$$\left(A''_6 + \frac{k'}{12}\right) + \left(B''_6 + \frac{k'}{12}\right) + C'''_6 = 180°$$

Si $A''' = A''_1 + \frac{k'}{12}$ ; luego tendremos:

$$A'''_1 + B'''_1 + C'''_1 = 180°$$
$$A'''_2 + B'''_2 + C'''_2 = 180°$$
$$A'''_3 + B'''_3 + C'''_3 = 180°$$
$$A'''_4 + B'''_4 + C'''_4 = 180°$$
$$A'''_5 + B'''_5 + C'''_5 = 180°$$
$$A'''_6 + B'''_6 + C'''_6 = 180°$$

$$C'''_1 + C'''_2 + C'''_3 + C'''_4 + C'''_5 + C'''_6 = 360°$$

## C.- CONDICION DE LADO

La longitud que se calcula para los lados de la malla debe ser la misma, independiente del camino que se utilice para su calculo.

Supongamos conocido el lado AB y calcularemos el lado DE. Utilizando el teorema del seno tendremos:

I.- $$\frac{AB}{\text{sen } C'''_1} = \frac{BG}{\text{sen } A'''_1} \Rightarrow \overline{BG} = \overline{AB}\,\frac{\text{sen } A'''_1}{\text{sen } C'''_1}$$

$$\frac{CG}{\text{sen } A'''_2} = \frac{BG}{\text{sen } B'''_2} \Rightarrow \overline{CG} = \overline{BG}\,\frac{\text{sen } A'''_2}{\text{sen } B'''_2}$$

$$\frac{GD}{\text{sen } A'''_3} = \frac{CG}{\text{sen } B'''_3} \Rightarrow \overline{GD} = \overline{CG}\,\frac{\text{sen } A'''_3}{\text{sen } B'''_3}$$

$$\frac{DE}{\text{sen } C'''_4} = \frac{GD}{\text{sen } B'''_4} \Rightarrow \overline{DE} = \overline{GD}\,\frac{\text{sen } C'''_4}{\text{sen } B'''_4}$$

Luego la Distancia $\overline{DE}$ calculada es:

$$\overline{DE} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen } A'''_1}{\text{sen } C'''_1} \cdot \frac{\text{sen } A'''_2}{\text{sen } B'''_2} \cdot \frac{\text{sen } A'''_3}{\text{sen } B'''_3} \cdot \frac{\text{sen } C'''_4}{\text{sen } B'''_4}$$

II.- $$\frac{AB}{\text{sen } C'''_1} = \frac{AG}{\text{sen } B'''_1} \Rightarrow \overline{AG} = \overline{AB}\,\frac{\text{sen } B'''_1}{\text{sen } C'''_1}$$

$$\frac{GF}{\text{sen } B'''_6} = \frac{AG}{\text{sen } A'''_6} \Rightarrow \overline{GF} = \overline{AG}\,\frac{\text{sen } B'''_6}{\text{sen } A'''_6}$$

$$\frac{GE}{\text{sen } B'''_5} = \frac{GF}{\text{sen } A'''_5} \Rightarrow \overline{GE} = \overline{GF}\,\frac{\text{sen } B'''_5}{\text{sen } A'''_5}$$

$$\frac{DE}{\text{sen } C'''_4} = \frac{GE}{\text{sen } A'''_4} \Rightarrow \overline{DE} = GE\,\frac{\text{sen } C'''_4}{\text{sen } A'''_4}$$

La distancia $\overline{DE}$ calculada por este nuevo camino es:

$$\overline{DE} = \overline{AB}\,\frac{\operatorname{sen} B'''_1}{\operatorname{sen} C'''_1}\cdot\frac{\operatorname{sen} B'''_6}{\operatorname{sen} A'''_6}\cdot\frac{\operatorname{sen} B'''_5}{\operatorname{sen} A'''_5}\cdot\frac{\operatorname{sen} C'''_4}{\operatorname{sen} A'''_4}$$

Igualando la distancia $\overline{DE}$ calculada por los dos caminos, se tiene:

$$\cancel{\overline{AB}}\,\frac{\operatorname{sen} A'''_1}{\cancel{\operatorname{sen} C'''_1}}\cdot\frac{\operatorname{sen} A'''_2}{\operatorname{sen} B'''_2}\cdot\frac{\operatorname{sen} A'''_3}{\operatorname{sen} B'''_3}\cdot\frac{\cancel{\operatorname{sen} C'''_4}}{\operatorname{sen} B'''_4} =$$

$$= \cancel{\overline{AB}}\,\frac{\operatorname{sen} B'''_1}{\cancel{\operatorname{sen} C'''_1}}\cdot\frac{\operatorname{sen} B'''_6}{\operatorname{sen} A'''_6}\cdot\frac{\operatorname{sen} B'''_5}{\operatorname{sen} A'''_5}\cdot\frac{\cancel{\operatorname{sen} C'''_4}}{\operatorname{sen} A'''_4}$$

$$\frac{\operatorname{sen} A'''_1}{\operatorname{sen} B'''_1}\cdot\frac{\operatorname{sen} A'''_2}{\operatorname{sen} B'''_2}\cdot\frac{\operatorname{sen} A'''_3}{\operatorname{sen} B'''_3}\cdot\frac{\operatorname{sen} A'''_4}{\operatorname{sen} B'''_4}\cdot\frac{\operatorname{sen} A'''_5}{\operatorname{sen} B'''_5}\cdot\frac{\operatorname{sen} A'''_6}{\operatorname{sen} B'''_6} = 1$$

C.1.- La Ecuación de Condición es:

$$\frac{\prod \operatorname{sen} A_i}{\prod \operatorname{sen} B_i} = 1$$

C.2.- Esta condición por lo general no se cumple, razón por la cual es necesario aplicar una corrección a los ángulos $A'''_i$ y $B'''_i$, de forma tal que al efectuar la corrección sobre los ángulos $A'''_i$ y $B'''_i$ no se alteren las condiciones de Triángulo y de Giro al horizonte. La corrección aplicada corresponde a un valor $\underline{X}$ que se suma a los ángulos $A'''_i$ y se resta a los ángulos $B'''_i$

$$A^{IV}_i = A'''_i + X$$

$$B^{IV}_i = B'''_i - X$$

$$\operatorname{sen}(A'''_i + X) = \operatorname{sen} A'''_i \cos X + \operatorname{sen} X \cos A'''_i$$

$$\operatorname{sen}(B'''_i - X) = \operatorname{sen} B'''_i \cos X - \operatorname{sen} X \cos B'''_i$$

Como el ángulo $\underline{X}$ es muy pequeña, se tiene

$$\cos X \longrightarrow 1$$
$$\operatorname{sen} X \longrightarrow X$$

luego tendremos :

$$\operatorname{sen}(A'''_i + x) = \operatorname{sen} A'''_i + x \cos A'''_i$$
$$= \operatorname{sen} A'''_i \left[1 + x \operatorname{ctg} A'''_i\right]$$

$$\operatorname{sen}(B'''_i - x) = \operatorname{sen} B'''_i - x \cos B'''_i$$
$$= \operatorname{sen} B'''_i \left[1 - x \operatorname{ctg} B'''_i\right]$$

reemplazando en la ecuación de Condición:

$$\frac{\prod \operatorname{sen}(A'''_i + x)}{\prod \operatorname{sen}(B'''_i - x)} = 1$$

$$\operatorname{sen} A'''_1 \left[1 + x \operatorname{ctg} A'''_1\right]$$
$$\operatorname{sen} A'''_2 \left[1 + x \operatorname{ctg} A'''_2\right]$$
$$\operatorname{sen} A'''_3 \left[1 + x \operatorname{ctg} A'''_3\right]$$
$$\operatorname{sen} A'''_4 \left[1 + x \operatorname{ctg} A'''_4\right]$$
$$\operatorname{sen} A'''_5 \left[1 + x \operatorname{ctg} A'''_5\right]$$
$$\operatorname{sen} A'''_6 \left[1 + x \operatorname{ctg} A'''_6\right]$$
$$\operatorname{sen} B'''_1 \left[1 - x \operatorname{ctg} B'''_1\right]$$
$$\operatorname{sen} B'''_2 \left[1 - x \operatorname{ctg} B'''_2\right]$$
$$\operatorname{sen} B'''_3 \left[1 - x \operatorname{ctg} B'''_3\right]$$
$$\operatorname{sen} B'''_4 \left[1 - x \operatorname{ctg} B'''_4\right]$$
$$\operatorname{sen} B'''_5 \left[1 - x \operatorname{ctg} B'''_5\right]$$
$$\operatorname{sen} B'''_6 \left[1 - x \operatorname{ctg} B'''_6\right]$$

$$1 = \frac{\operatorname{sen} A'''_1 \operatorname{sen} A'''_2 \operatorname{sen} A'''_3 \operatorname{sen} A'''_4 \operatorname{sen} A'''_5 \operatorname{sen} A'''_6 [1 + x\, ctg\, A'''_1][1 + x\, ctg\, A'''_2][1 + x\, ctg\, A'''_3][1 + x\, ctg\, A'''_4][1 + x\, ctg\, A'''_5][1 + x\, ctg\, A'''_6]}{\operatorname{sen} \beta'''_1 \operatorname{sen} \beta'''_2 \operatorname{sen} \beta'''_3 \operatorname{sen} \beta'''_4 \operatorname{sen} \beta'''_5 \operatorname{sen} \beta'''_6 [1 - x\, ctg\, \beta'''_1][1 - x\, ctg\, \beta'''_2][1 - x\, ctg\, \beta'''_3][1 - x\, ctg\, \beta'''_4][1 - x\, ctg\, \beta'''_5][1 - x\, ctg\, \beta'''_6]}$$

$$\frac{\tilde{\Pi} \operatorname{sen} A'''_i}{\tilde{\Pi} \operatorname{sen} \beta'''_i} \cdot \frac{[1 + x\, ctg\, A'''_1][1 + x\, ctg\, A'''_2][1 + x\, ctg\, A'''_3][1 + x\, ctg\, A'''_4][1 + x\, ctg\, A'''_5][1 + x\, ctg\, A'''_6]}{[1 - x\, ctg\, \beta'''_1][1 - x\, ctg\, \beta'''_2][1 - x\, ctg\, \beta'''_3][1 - x\, ctg\, \beta'''_4][1 - x\, ctg\, \beta'''_5][1 - x\, ctg\, \beta'''_6]} = 1$$

$$[1 + x\, ctg\, A'''_2 + x\, ctg\, A'''_1 + x^2 ctg\, A'''_1\, ctg\, A'''_2][1 + x\, ctg\, A'''_3] =$$

$$[1 + x\, ctg\, A'''_2 + x\, ctg\, A'''_1 + \cancelto{0}{x^2 ctg\, A'''_1\, ctg\, A'''_2} + x\, ctg\, A'''_3 + \cancelto{0}{x^2 ctg\, A'''_2\, ctg\, A'''_3} + \cancelto{0}{x^2 ctg\, A'''_1\, ctg\, A'''_3} + \cancelto{0}{x^3 ctg\, A'''_1\, ctg\, A'''_2\, ctg\, A'''_3}]$$

Los términos de $X^2$ o mayores son no considerados por tender a ser cero

$$[1 + x\, ctg\, A'''_4][1 + x\, ctg\, A'''_2 + x\, ctg\, A'''_1 + x\, ctg\, A'''_3] =$$

$$1 + x\, ctg\, A'''_2 + x\, ctg\, A'''_1 + x\, ctg\, A'''_3 + x\, ctg\, A'''_4 + \cancelto{0}{x^2 ctg\, A'''_4\, ctg\, A'''_2} + \cancelto{0}{x^2 ctg\, A'''_4\, ctg\, A'''_1} + \cancelto{0}{x^2 ctg\, A'''_4\, ctg\, A'''_3}]$$

$$[1 + x\, ctg\, A'''_5][1 + x\, ctg\, A'''_2 + x\, ctg\, A'''_1 + x\, ctg\, A'''_3 + x\, ctg\, A'''_4] =$$

$$[1 + x\, ctg\, A'''_2 + x\, ctg\, A'''_1 + x\, ctg\, A'''_3 + x\, ctg\, A'''_4 + x\, ctg\, A'''_5 + \cancelto{0}{\cdots}]$$

$$[1 + x\, ctg\, A'''_6][1 + x\, ctg\, A'''_1 + x\, ctg\, A'''_2 + x\, ctg\, A'''_3 + x\, ctg\, A'''_4 + x\, ctg\, A'''_5]$$

$$1 + x\, ctg\, A'''_1 + x\, ctg\, A'''_2 + x\, ctg\, A'''_3 + x\, ctg\, A'''_4 + x\, ctg\, A'''_5 + x\, ctg\, A'''_6 + \cancelto{0}{\cdots}]$$

El desarrollo para los términos del ángulo $\underline{B'''i}$ son similares al desarrollo de $\underline{A'''i}$ ya demostrado.

$$\frac{\Pi \operatorname{sen} A'''i}{\Pi \operatorname{sen} B'''i} \cdot \frac{(1 + x \sum ctg\, A'''i)}{(1 - x \sum ctg\, B'''i)} = 1$$

$$\frac{\Pi \operatorname{sen} A'''i}{\Pi \operatorname{sen} B'''i} = 1 + \varepsilon$$

Amplificando por $(1 + x \sum ctg\, B''')$

$$(1+\varepsilon)\, \frac{[1 + x \sum ctg\, A''']}{[1 - x \sum ctg\, B'''i]} \cdot \frac{[1 + x \sum ctg\, B''']}{[1 - x \sum ctg\, B'''i]} = 1$$

$$(1+\varepsilon)\, \frac{[1 + x \sum ctg\, B''' + x \sum ctg\, A''' + \cancel{x^2 \sum ctg\, A'''\, ctg\, B'''}^{\,0}]}{1 - \cancel{x^2 \sum ctg^2 B'''}^{\,0}} = 1$$

$$[1+\varepsilon]\,[1 + x \sum ctg\, B''' + x \sum ctg\, A'''] = 1$$

$$1 + x \sum ctg\, B''' + x \sum ctg\, A''' + \varepsilon + \cancel{\varepsilon x \sum ctg\, B'''}^{\,0} + \cancel{\varepsilon x \sum ctg\, A'''}^{\,0} = 1$$

$$\cancel{1} + \varepsilon + x \sum ctg\, B''' + x \sum ctg\, A''' = \cancel{1}$$

$$x\, [\sum ctg\, B''' + \sum ctg\, A'''] = -\varepsilon$$

$$\boxed{X = \frac{-\varepsilon}{[\sum ctg\, A''' + \sum ctg\, B''']}}$$

$$\boxed{X'' = \frac{-\varepsilon}{[\sum ctg\, A''' + \sum ctg\, B''']} \cdot \frac{1}{arc\, 1''}} \qquad \boxed{X^{cc} = \frac{-\varepsilon}{[\sum ctg\, A''' + \sum ctg\, B''']} \cdot \frac{1}{arc\, 1^{cc}}}$$

$arc\, 1'' = 4{,}848136811 \times 10^{-6}$ ; $arc\, 1^{cc} = 1{,}570796327 \times 10^{-6}$

Otra forma de calcular $\underline{X}$ con mayor rigurosidad sería:

$$\frac{\widehat{\Pi} \text{ sen } A}{\widehat{\Pi} \text{ sen } \beta} = 1 \quad : \text{Ec. de Condición.}$$

De producirse un error, tendríamos

$$\widehat{\Pi} \text{ sen } A''' - \widehat{\Pi} \text{ sen } \beta''' = \delta$$

Aplicando la corrección $\underline{X}$ a los ángulos $A'''$ y $B'''$, tendremos:

$$\widehat{\Pi} \text{ sen } (A''' + X) - \widehat{\Pi} \text{ sen } (\beta''' - X) = 0$$

De acuerdo al desarrollo anterior nos queda.

$$\widehat{\Pi} \text{ sen } A''' \left[1 + X \Sigma \text{ ctg } A'''\right] = \widehat{\Pi} \text{ sen } \beta''' \left[1 - X \Sigma \text{ ctg } \beta'''\right]$$

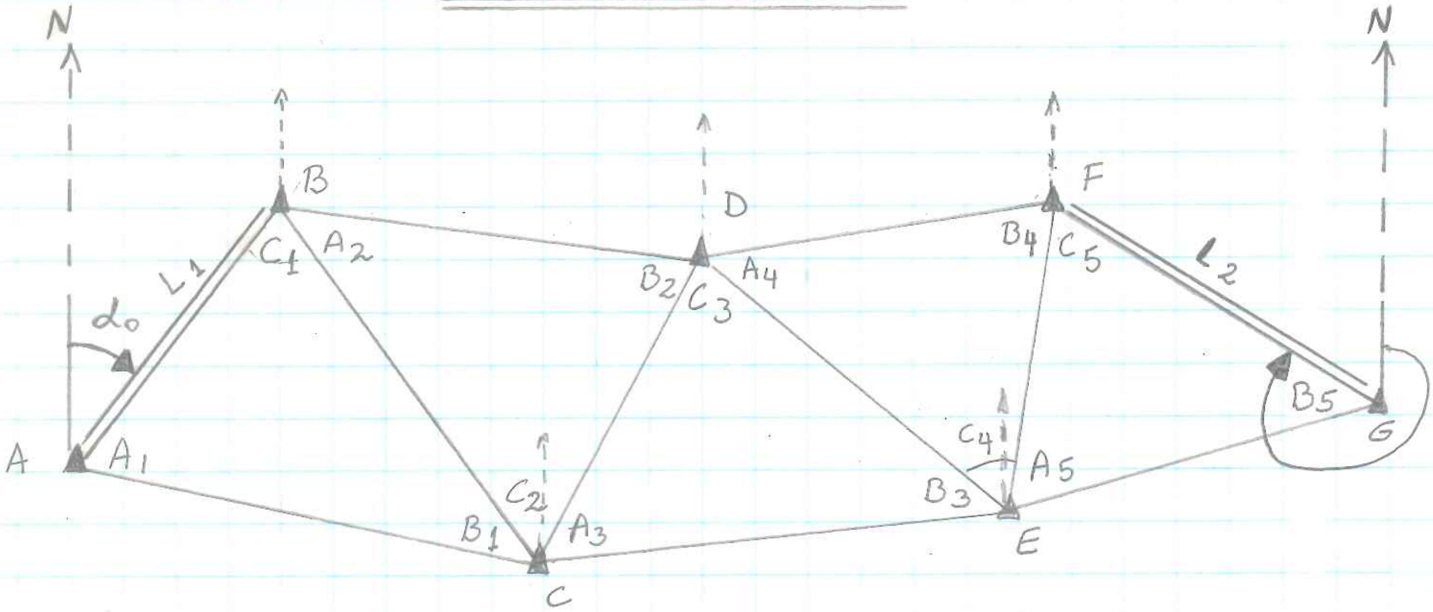
$$\widehat{\Pi} \text{ sen } A''' + X \widehat{\Pi} \text{ sen } A''' \Sigma \text{ ctg } A''' = \widehat{\Pi} \text{ sen } \beta''' - X \widehat{\Pi} \text{ sen } \beta''' \Sigma \text{ ctg } \beta'''$$

$$\left[\widehat{\Pi} \text{ sen } A''' - \widehat{\Pi} \text{ sen } \beta'''\right] + X \left[\widehat{\Pi} \text{ sen } A''' \Sigma \text{ ctg } A''' + \widehat{\Pi} \text{ sen } \beta''' \Sigma \text{ ctg } \beta'''\right] = 0$$

$$\delta \qquad + X \left[\widehat{\Pi} \text{ sen } A''' \Sigma \text{ ctg } A''' + \widehat{\Pi} \text{ sen } \beta''' \Sigma \text{ ctg } \beta'''\right] = 0$$

$$\boxed{X = \frac{-\delta}{\left[\widehat{\Pi} \text{ sen } A''' \Sigma \text{ ctg } A''' + \widehat{\Pi} \text{ sen } \beta''' \Sigma \text{ ctg } \beta'''\right]}}$$

# COMPENSACION TOPOGRAFICA DE UNA RED DE TRIANGULOS




Las Condiciones que debe cumplir una Red de Triángulos para su compensación son las siguientes:

a) Condición de Triángulos

b) Condición de Azimut

c) Condición de Lado.

$d_0$ ; Azimut inicial

$L_1$ y $L_2$ ; bases medidas en los extremos de la red de Triángulos

A, B, C, D, E, F y G ; son Vértices de la red de Triangulación.

## A) CONDICION DE TRIANGULOS

Cada Triángulo de la red debe cumplir que la suma de los tres ángulos interiores sea 180° o 200 g.

A.1.- Ecuaciones de Condición

$$A_1 + B_1 + C_1 = 180°$$
$$A_2 + B_2 + C_2 = 180°$$
$$A_3 + B_3 + C_3 = 180°$$
$$A_4 + B_4 + C_4 = 180°$$
$$A_5 + B_5 + C_5 = 180°$$

A.2.- Al reemplazar los ángulos medidos en terreno en las Ecuaciones de Condición tendremos:

$$A'_1 + B'_1 + C'_1 = 180° + d_1$$
$$A'_2 + B'_2 + C'_2 = 180° + d_2$$
$$A'_3 + B'_3 + C'_3 = 180° + d_3$$
$$A'_4 + B'_4 + C'_4 = 180 + d_4$$
$$A'_5 + B'_5 + C'_5 = 180 + d_5$$

- $d_i$, son los errores producidos en cada triángulo
- $A'_i$, ángulos observados en terreno.

A.3.- Se debe encontrar una corrección $\underline{d'}$ tal que sea igual en magnitud a $\underline{d}$ pero de signo contrario. Esta corrección se divide por 3 y se aplica a cada uno de los triángulos.

$$(A'_1 + d_1/3) + (B'_1 + d_1/3) + (C'_1 + d_1/3) = 180°$$
$$(A'_2 + d_2/3) + (B'_2 + d_2/3) + (C'_2 + d_2/3) = 180°$$
$$(A'_3 + d_3/3) + (B'_3 + d_3/3) + (C'_3 + d_3/3) = 180°$$
$$(A'_4 + d_4/3) + (B'_4 + d_4/3) + (C'_4 + d_4/3) = 180°$$
$$(A'_5 + d_5/3) + (B'_5 + d_5/3) + (C'_5 + d_5/3) = 180°$$

Si $A'' = A'_1 + d_1/3$ ; entonces tendremos:

$$A''_1 + B''_1 + C''_1 = 180^\circ$$

$$A''_2 + B''_2 + C''_2 = 180^\circ$$

$$A''_3 + B''_3 + C''_3 = 180^\circ$$

$$A''_4 + B''_4 + C''_4 = 180^\circ$$

$$A''_5 + B''_5 + C''_5 = 180^\circ$$

Con esto queda cumplida la condición de triángulo.

## B.- CONDICION DE AZIMUT

Una vez que se ha cumplido la condición de triángulo, se debe hacer cumplir la condición de azimut, que se desarrolla como a continuación se señala:

### B.1.- Ecuación de Condición.

$$\alpha_{AB} = \alpha_0$$

$$\alpha_{BC} = \alpha_0 + 180^\circ - C''_1$$

$$\alpha_{CD} = \alpha_{BC} + 180^\circ + C''_2$$

$$\alpha_{DE} = \alpha_{CD} + 180^\circ - C''_3$$

$$\alpha_{EF} = \alpha_{DE} + 180^\circ + C''_4$$

$$\alpha_{FG} = \alpha_{EF} + 180^\circ - C''_5$$

$$\alpha_{GF} = \alpha_{FG} + 180^\circ + k$$

Se busca una corrección $\underline{k'}$ de igual magnitud de $\underline{k}$ pero de signo contrario. Esta corrección se divide por el número de ángulos que participan del cálculo y luego se aplica esta corrección resultante a cada ángulo.

B.2.- Se aplica la corrección a cada uno de los ángulos:

$$C'''_i = C''_i + k'/5$$

$$\alpha_{AB} = \alpha_0$$

$$\alpha_{BC} = \alpha_0 + 180° - (C''_1 + k'/5)$$

$$\alpha_{CD} = \alpha_{BC} + 180° + (C''_2 + k'/5)$$

$$\alpha_{DE} = \alpha_{CD} + 180° - (C''_3 + k'/5)$$

$$\alpha_{EF} = \alpha_{DE} + 180° + (C''_4 + k'/5)$$

$$\alpha_{FG} = \alpha_{EF} + 180° - (C''_5 + k'/5)$$

$$\alpha_{GF} = \alpha_{FG} + 180° //$$

Queda cumplida esta condición de Azimut. Sin embargo, al efectuar el ajuste de esta condición se produce una descorrección en el ajuste de la Condición de Triángulo, luego será necesario corregir los ángulos $A''_i$ y $B''_i$ de manera que corrección no altere la condición de azimut ya cumplida.

La corrección $k'$ se deberá dividir por un medio de la corrección aplicada a cada ángulo $C''_i$, y este valor resultante sumárselo a los ángulos $A''_i$ y $B''_i$.

B.4.- Corrección ángulos $B''_i$ y $A''_i$.

$$(A''_1 + k'/10) + (B''_1 + k'/10) + C'''_1 = 180°$$

$$(A''_2 + k'/10) + (B''_2 + k'/10) + C'''_2 = 180°$$

$$(A''_3 + k'/10) + (B''_3 + k'/10) + C'''_3 = 180°$$

$$(A''_4 + k'/10) + (B''_4 + k'/10) + C'''_4 = 180°$$

$$(A''_5 + k'/10) + (B''_5 + k'/10) + C'''_5 = 180°$$

si $A''' = A''_i + k' / 10$

$$A'''_1 + B'''_1 + C'''_1 = 180°$$
$$A'''_2 + B'''_2 + C'''_2 = 180°$$
$$A'''_3 + B'''_3 + C'''_3 = 180°$$
$$A'''_4 + B'''_4 + C'''_4 = 180°$$
$$A'''_5 + B'''_5 + C'''_5 = 180°$$

## C.- CONDICION DE LADO

Se conocen las distancias $L_1$ y $L_2$, que son las distancias en los extremos de la red. Se planteará la ecuación de condición necesaria para hacer que se cumpla esta condición.

### C.1.- Ecuación de condición.

$$\frac{L_1}{\operatorname{Sen} B_1} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{Sen} A_1} \Rightarrow \overline{BC} = L_1 \frac{\operatorname{sen} A_1}{\operatorname{Sen} B_1}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\operatorname{Sen} B_2} = \frac{\overline{DC}}{\operatorname{Sen} A_2} \Rightarrow \overline{DC} = \overline{BC} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_2}{\operatorname{Sen} B_2}$$

$$\frac{DE}{\operatorname{Sen} A_3} = \frac{DC}{\operatorname{Sen} B_3} \Rightarrow \overline{DE} = \overline{DC} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_3}{\operatorname{Sen} B_3}$$

$$\frac{FE}{\operatorname{Sen} A_4} = \frac{DE}{\operatorname{Sen} B_4} \Rightarrow \overline{FE} = \overline{DE} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_4}{\operatorname{Sen} B_4}$$

$$\frac{L_2}{\operatorname{Sen} A_5} = \frac{FE}{\operatorname{Sen} B_5} \Rightarrow L_2 = FE \frac{\operatorname{sen} A_5}{\operatorname{Sen} B_5}$$

$$L_2 = L_1 \frac{\operatorname{sen} A_1}{\operatorname{Sen} B_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_2}{\operatorname{Sen} B_2} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_3}{\operatorname{Sen} B_3} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_4}{\operatorname{Sen} B_4} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_5}{\operatorname{Sen} B_5}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\prod \operatorname{Sen} A}{\prod \operatorname{Sen} B}$$

C.2.- Al aplicar los ángulos compensados a la ecuación de condición tendremos:

$$\frac{\prod \text{sen } A'''i}{\prod \text{sen } B'''i} = \frac{L_2}{L_1}$$

$$L_1 \prod \text{sen } A'''i = L_2 \prod \text{sen } B'''i$$

$$L_1 \prod \text{sen } A'''i - L_2 \prod \text{sen } B'''i = 0$$

de existir error, tendríamos:

$$L_1 \prod \text{sen } A'''i - L_2 \prod \text{sen } B'''i = \delta$$

Para que se cumpla la ecuación de condición, es necesario encontrar una corrección $x$ que se le aplique a los ángulos $A'''i$ y $B'''i$

$$L_1 \prod \text{sen } (A'''i + x) - L_2 \prod \text{sen } (B'''i - x) = 0$$

$$L_1 [\text{sen}(A'''_1 + x) \text{ sen}(A'''_2 + x) \text{ sen}(A'''_3 + x) \text{ sen}(A'''_4 + x) \text{ sen}(A'''_5 + x)] -$$

$$- L_2 [\text{sen}(B'''_1 - x) \text{ sen}(B'''_2 - x) \text{ sen}(B'''_3 - x) \text{ sen}(B'''_4 - x) \text{ sen}(B'''_5 - x)] = 0$$

Considerando que el ángulo de corrección es muy pequeño $x$, tendremos:

$$\cos x \longrightarrow 1$$
$$\text{sen } x \longrightarrow x$$

Todos los valores de $x^2$ o potencias mayores se consideran igual a cero.

Desarrollando tendremos:

$$L_1 \prod \text{sen } A''' [1 + x \Sigma \text{ ctg } A'''] - L_2 \prod \text{sen } B''' [1 - x \Sigma \text{ ctg } B'''] = 0$$

$$L_1 \prod \text{sen } A''' + x L_1 \prod \text{sen } A''' \Sigma \text{ ctg } A''' - L_2 \prod \text{sen } B''' + x L_2 \prod \text{sen } B''' \Sigma \text{ ctg } B''' = 0$$

$$[L_1 \prod \text{sen } A''' - L_2 \prod \text{sen } B'''] + x [L_1 \prod \text{sen } A''' \Sigma \text{ ctg } A''' + L_2 \prod \text{sen } B''' \Sigma \text{ ctg } B'''] = 0$$

$$\delta + x\,[L_1 \widehat{11} \operatorname{sen} A''' \Sigma \operatorname{ctg} A''' + L_2 \widehat{11} \operatorname{sen} B''' \Sigma \operatorname{ctg} B'''] = 0$$

$$X = \frac{-\delta}{[L_1 \widehat{11} \operatorname{sen} A''' \Sigma \operatorname{ctg} A''' + L_2 \widehat{11} \operatorname{sen} B''' \Sigma \operatorname{ctg} B''']}$$

$$x'' = \frac{-\delta}{[L_1 \widehat{11} \operatorname{sen} A''' \Sigma \operatorname{ctg} A''' + L_2 \widehat{11} \operatorname{sen} B''' \Sigma \operatorname{ctg} B'''] \operatorname{arc} 1''}$$

$$x^{cc} = \frac{-\delta}{[L_1 \widehat{11} \operatorname{sen} A''' \Sigma \operatorname{ctg} A''' + L_2 \widehat{11} \operatorname{sen} B''' \Sigma \operatorname{ctg} B'''] \operatorname{arc} 1^{cc}}$$

Luego finalmente nos queda:

$$A^{IV}_i = A'''_i + x$$
$$B^{IV}_i = B'''_i - x$$

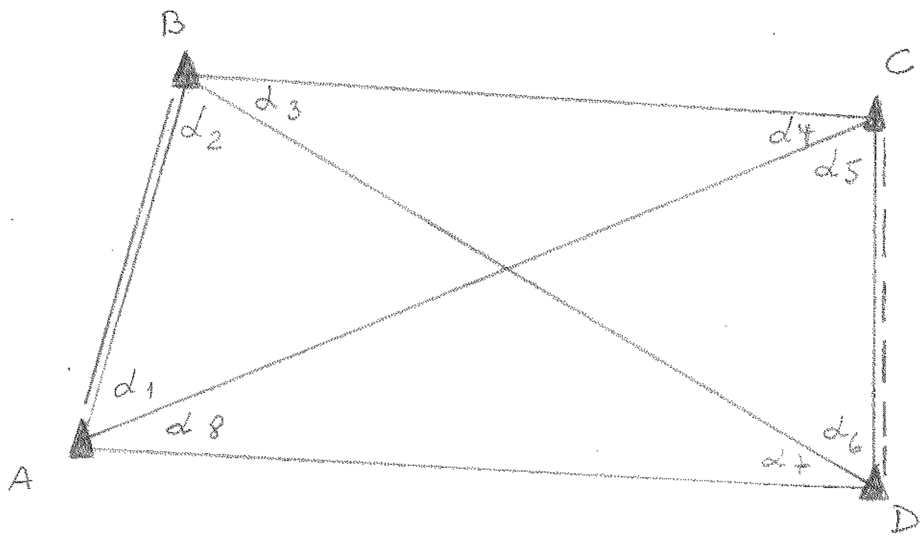
a) $A^{IV}_i + B^{IV}_i + C'''_i = 180°$

b) $\alpha_{FG} = \alpha_0 + 900° + (C'''_2 + C'''_4) - (C'''_1 + C'''_3 + C'''_5)$

c) $L_1 \widehat{11} \operatorname{sen} A^{IV}_i - L_2 \widehat{11} \operatorname{sen} B^{IV}_i = 0$

# COMPENSACION TOPOGRAFICA DE UN

## CUADRILATERO




Las Condiciones que debe cumplir el cuadrilatero son:

a) Condición de TRIANGULO

b) Condición de Lado

## A.- CONDICION DE TRIANGULO

A.1.- Ecuaciones de Condición

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180°$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_7 + \alpha_8 = 180°$$

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 180°$$

A.2.- Al reemplazar las mediciones en las ecuaciones de Condición tendremos:

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 = 180 + d_1$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_7 + \alpha'_8 = 180 + d_2$$

$$\alpha'_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 + \alpha'_6 = 180 + d_3$$

A.3.- Para que se cumplan las ecuaciones de condición, es necesario efectuar correcciones a las mediciones angulares

$$(\alpha'_1 + v_1) + (\alpha'_2 + v_2) + (\alpha'_3 + v_3) + (\alpha'_4 + v_4) = 180°$$

$$(\alpha'_1 + v_1) + (\alpha'_2 + v_2) + (\alpha'_7 + v_7) + (\alpha'_8 + v_8) = 180°$$

$$(\alpha'_3 + v_3) + (\alpha'_4 + v_4) + (\alpha'_5 + v_5) + (\alpha'_6 + v_6) = 180°$$

A. 4.- Luego las correcciones $\underline{v_i}$ aplicadas a los ángulos en cada ecuación, deben sumar una magnitud igual al error $\underline{d_i}$ pero de signo contrario.

$$C_1: (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + d_1 = 0$$

$$C_2: (v_1 + v_2 + v_7 + v_8) + d_2 = 0$$

$$C_3: (v_3 + v_4 + v_5 + v_6) + d_3 = 0$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones condicionadas, ya que en ellas se condiciona que la suma de las correcciones es igual al error en magnitud pero de signo contrario.

A. 5.- Una solución rigurosa se encuentra en el Método de Mínimos Cuadrados.

$$\phi: v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2 + v_7^2 + v_8^2 \longrightarrow \text{mínima.}$$

Luego es necesario definir una función que pueda relacionar las ecuaciones condicionadas y hacerlas mínima.

$$F: \phi + 2\lambda_1 C_1 + 2\lambda_2 C_2 + 2\lambda_3 C_3 \longrightarrow \text{mínimo}$$

Donde $\lambda_1, \lambda_2$ y $\lambda_3$ son multiplicadores de Lagrange, $C_1, C_2$ y $C_3$ son las ecuaciones condicionadas y el 2 que antecede es un valor arbitrario que permite simplificaciones posteriores.

A.6.- Definida la función I como un máximo, es necesario hacerla mínimo, para lo cual se obtiene la derivada parcial de la Función (F) respecto a cada una de las variables ($v_i$) y se iguala a cero.

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} ; \frac{\partial F}{\partial v_2} ; \frac{\partial F}{\partial v_3} ; \frac{\partial F}{\partial v_4} ; \frac{\partial F}{\partial v_5} ; \frac{\partial F}{\partial v_6} ; \frac{\partial F}{\partial v_7} ; \frac{\partial F}{\partial v_8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 2v_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_2} = 2v_2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_3} = 2v_3 + 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_4} = 2v_4 + 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_5} = 2v_5 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_6} = 2v_6 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_7} = 2v_7 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_8} = 2v_8 + 2\lambda_2 = 0$$

$v_1 = -\lambda_1 - \lambda_2$ $\qquad$ $v_5 = -\lambda_3$

$v_2 = -\lambda_1 - \lambda_2$ $\qquad$ $v_6 = -\lambda_3$

$v_3 = -\lambda_1 - \lambda_3$ $\qquad$ $v_7 = -\lambda_2$

$v_4 = -\lambda_1 - \lambda_3$ $\qquad$ $v_8 = -\lambda_2$

A. 8.- Reemplazando los parámetros indeterminados de Lagrange en las ecuaciones condicionadas tendremos:

$$C_1: (-\lambda_1-\lambda_2)+(-\lambda_1-\lambda_2)+(-\lambda_1-\lambda_3)+(-\lambda_1-\lambda_3) = -d_1$$

$$C_2: (-\lambda_1-\lambda_2)+(-\lambda_1-\lambda_2)+(-\lambda_2)+(-\lambda_2) = -d_2$$

$$C_3: (-\lambda_1-\lambda_3)+(-\lambda_1-\lambda_3)+(-\lambda_3)+(-\lambda_3) = -d_3$$

$$-4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = -d_1$$

$$-2\lambda_1 - 4\lambda_2 \quad 0 = -d_2$$

$$-2\lambda_1 \quad 0 \quad -4\lambda_3 = -d_3$$

1) $4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = d_1$
2) $2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 0 = d_2$
3) $2\lambda_1 + 0 + 4\lambda_3 = d_3$

Solución por determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot4\cdot4 + 2\cdot0\cdot2 + 2\cdot2\cdot0 - 2\cdot4\cdot2 + 2\cdot2\cdot4 - 4\cdot0\cdot0 = 64 + 0 + 0 - 16 - 16 = 32$$

$$\therefore D = 32$$

Si tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

La solución se encuentra por el siguiente sistema

$$X = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

En nuestro caso tendremos:

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= d_1 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 0 \quad &= d_2 \\ 2\lambda_1 + 0 \quad + 4\lambda_3 &= d_3 \end{aligned}$$

Sabemos que $D = 32$

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & 2 & 2 \\ d_2 & 4 & 0 \\ d_3 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{32}$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & d_1 & 2 \\ 2 & d_2 & 0 \\ 2 & d_3 & 4 \end{vmatrix}}{32}$$

$$\lambda_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & d_1 \\ 2 & 4 & d_2 \\ 2 & 0 & d_3 \end{vmatrix}}{32} = \frac{\cancel{16d_3} + 4d_2 + 0 - 8d_1 - \cancel{4d_3}}{32} - 0$$

$$\frac{12d_3 + 4d_2 - 8d_1}{32} = \frac{3d_3 + d_2 - 2d_1}{8}$$

$$\lambda_1 = \frac{d_1 \cdot 4 \cdot 4 + \cancel{2 \cdot 0 \cdot d_3}^{0} + \cancel{2 \cdot d_2 \cdot 0}^{0} - d_3 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot d_2 \cdot 4 - \cancel{d_1 \cdot 0 \cdot 0}^{0}}{32}$$

$$\lambda_1 = \frac{16 d_1 - 8 d_2 - 8 d_3}{32}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{2 d_1 - d_2 - d_3}{4}}$$

$$\lambda_2 = \frac{4 \cdot 4 d_2 + \cancel{d_1 \cdot 0 \cdot 2}^{0} + 2 \cdot 2 \cdot d_3 - 2 \cdot 2 \cdot d_2 - d_1 \cdot 2 \cdot 4 - \cancel{4 \cdot 0 \cdot d_3}^{0}}{32}$$

$$\lambda_2 = \frac{16 d_2 + 4 d_3 - 4 d_2 - 8 d_1}{32}$$

$$\lambda_2 = \frac{-8 d_1 + 12 d_2 + 4 d_3}{32}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{-2 d_1 + 3 \cdot d_2 + d_3}{8}}$$

$$\lambda_3 = \frac{d_3 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot d_2 \cdot 2 + \cancel{d_1 \cdot 2 \cdot 0}^{0} - d_1 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot d_3 - \cancel{4 \cdot d_2 \cdot 0}^{0}}{32}$$

$$\lambda_3 = \frac{12 d_3 + 4 d_2 - 8 d_1}{32} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{-8 d_1 + 4 d_2 + 12 d_3}{32}$$

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{-2 d_1 + d_2 + 3 d_3}{8}}$$

Reemplazaremos los $\lambda$ en las correcciones $v$

$$v_1 = \frac{2 d_1 - d_2 - d_3}{4} - \frac{-2 d_1 + 3 d_2 + d_3}{8}$$

$$v_2 = -\frac{2 d_1 - d_2 - d_3}{4} - \frac{-2 d_1 + 3 d_2 + d_3}{8}$$

$$N_3 = -\frac{2d_1 - d_2 - d_3}{4} - \frac{-2d_1 + d_2 + 3d_3}{8}$$

$$N_4 = -\frac{2d_1 - d_2 - d_3}{4} - \frac{-2d_1 + d_2 + 3d_3}{8}$$

$$N_5 = -\frac{-2d_1 + d_2 + 3d_3}{8}$$

$$N_6 = -\frac{-2d_1 + d_2 + 3d_3}{8}$$

$$N_7 = -\frac{-2d_1 + 3d_2 + d_3}{8}$$

$$N_8 = -\frac{-2d_1 + 3d_2 + d_3}{8}$$

Determinados los valores de las correcciones $N_i$, el problema se encuentra resuelto, en lo que respecta a la compensación por condición de triángulo.

$$(\alpha'_1 + N_1) + (\alpha'_2 + N_2) + (\alpha'_3 + N_3) + (\alpha'_4 + N_4) = 180°$$

$$(\alpha'_1 + N_1) + (\alpha'_2 + N_2) + (\alpha'_7 + N_7) + (\alpha'_8 + N_8) = 180°$$

$$(\alpha'_3 + N_3) + (\alpha'_4 + N_4) + (\alpha'_5 + N_5) + (\alpha'_6 + N_6) = 180°$$

Quedando los ángulos compensados

$$\alpha''_1 = (\alpha'_1 + N_1)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\alpha''_8 = (\alpha'_8 + N_8)$$

# B.- CONDICION DE LADO

## B.1 - Ecuación de Condición

I.- $\dfrac{BC}{\text{sen}\,\alpha 1} = \dfrac{AB}{\text{sen}\,\alpha 4} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AB}\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha 1}{\text{sen}\,\alpha 4}$

$\dfrac{CD}{\text{sen}\,\alpha 3} = \dfrac{BC}{\text{sen}\,\alpha 6} \Rightarrow \overline{CD} = BC\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha 3}{\text{sen}\,\alpha 6}$

① $\overline{CD}_{(I)} = \overline{AB}\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha 1}{\text{sen}\,\alpha 4} \cdot \dfrac{\text{sen}\,\alpha 3}{\text{sen}\,\alpha 6}$

II.- $\dfrac{DA}{\text{sen}\,\alpha 2} = \dfrac{AB}{\text{sen}\,\alpha 7} \Rightarrow \overline{DA} = \overline{AB}\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha 2}{\text{sen}\,\alpha 7}$

$\dfrac{CD}{\text{sen}\,\alpha 8} = \dfrac{DA}{\text{sen}\,\alpha 5} \Rightarrow \overline{CD} = DA\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha 8}{\text{sen}\,\alpha 5}$

② $\overline{CD}_{(II)} = \overline{AB}\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha 2}{\text{sen}\,\alpha 7} \cdot \dfrac{\text{sen}\,\alpha 8}{\text{sen}\,\alpha 5}$

IGUALANDO ambas ecuaciones ① y ②

$$\overline{AB}\,\frac{\text{sen}\,\alpha 1}{\text{sen}\,\alpha 4} \cdot \frac{\text{sen}\,\alpha 3}{\text{sen}\,\alpha 6} = \overline{AB}\,\frac{\text{sen}\,\alpha 2\ \text{sen}\,\alpha 8}{\text{sen}\,\alpha 5\ \text{sen}\,\alpha 7}$$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha 1 \cdot \text{sen}\,\alpha 3 \cdot \text{sen}\,\alpha 5 \cdot \text{sen}\,\alpha 6}{\text{sen}\,\alpha 2 \cdot \text{sen}\,\alpha 4 \cdot \text{sen}\,\alpha 6 \cdot \text{sen}\,\alpha 8} = 1$$

$$\frac{\prod \text{sen}\,\alpha\ \text{IMPAR}}{\prod \text{sen}\,\alpha\ \text{Par}} = 1$$

## B.2 - reemplazando en la ecuación de condición los ángulos compensados, tendremos:

$$\frac{\prod \text{sen}\,\alpha''\ \text{IMPAR}}{\prod \text{sen}\,\alpha''\ \text{PAR}} = (1 + \mathcal{E})$$

De no cumplirse la Ecuación de observación tendremos que encontrar una corrección $\underline{X}$, que al sumarse a los ángulos impares y restarse a los pares no altere la Condición inicial de Triángulo.

$$\alpha'''_1 = \alpha''_1 + x \qquad \alpha'''_2 = \alpha''_2 - x$$
$$\alpha'''_3 = \alpha''_3 + x \qquad \alpha'''_4 = \alpha''_4 - x$$
$$\alpha'''_5 = \alpha''_5 + x \qquad \alpha'''_6 = \alpha''_6 - x$$
$$\alpha'''_7 = \alpha''_7 + x \qquad \alpha'''_8 = \alpha''_8 - x$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha''_1+x)\operatorname{sen}(\alpha''_3+x)\operatorname{sen}(\alpha''_5+x)\operatorname{sen}(\alpha''_7+x)}{\operatorname{sen}(\alpha''_2-x)\operatorname{sen}(\alpha''_4-x)\operatorname{sen}(\alpha''_6-x)\operatorname{sen}(\alpha''_8-x)} = 1$$

Si la corrección X es muy pequeña, entonces tendremos:

$$\cos X \longrightarrow 1$$
$$\operatorname{sen} X \longrightarrow X$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha''_i + x) &= \operatorname{sen}\alpha''_i \cos x + \operatorname{sen} X \cos\alpha''_i \\ &= \operatorname{sen}\alpha''_i + X\cos\alpha''_i \\ &= \operatorname{sen}\alpha''_i\,[1 + X\operatorname{ctg}\alpha''_i]\end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha''_1[1+x\operatorname{ctg}\alpha''_1]\operatorname{sen}\alpha''_3[1+x\operatorname{ctg}\alpha''_3]\operatorname{sen}\alpha''_5[1+x\operatorname{ctg}\alpha''_5]\operatorname{sen}\alpha''_7[1+x\operatorname{ctg}\alpha''_7]}{\operatorname{sen}\alpha''_2[1-x\operatorname{ctg}\alpha''_2]\operatorname{sen}\alpha''_4[1-x\operatorname{ctg}\alpha''_4]\operatorname{sen}\alpha''_6[1-x\operatorname{ctg}\alpha''_6]\operatorname{sen}\alpha''_8[1-x\operatorname{ctg}\alpha''_8]} = 1$$

$$\frac{\prod \operatorname{sen}\alpha''_{IMPAR}\,[1+x\operatorname{ctg}\alpha''_1][1+x\operatorname{ctg}\alpha''_3][1+x\operatorname{ctg}\alpha''_5][1+x\operatorname{ctg}\alpha''_7]}{\prod \operatorname{sen}\alpha''_{PAR}\,[1-x\operatorname{ctg}\alpha''_2][1-X\operatorname{ctg}\alpha''_4][1-X\operatorname{ctg}\alpha''_6][1-X\operatorname{ctg}\alpha''_8]} = 1$$

Si consideramos que $\underline{X}$ es una corrección muy pequeña, luego $\underline{X}^2$ o potencias mayores de $\underline{X}$ deben ser cero. Con este principio nos queda:

$$\frac{\prod \operatorname{sen}\alpha''_{IMPA}}{\prod \operatorname{sen}\alpha''_{PAR}} \cdot \frac{[1 + X\,\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{IMP}]}{[1 - X\,\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{Par}]} = 1$$

$$(1+\varepsilon)\cdot\frac{[1 + X\,\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{IMP}]}{[1 - X\,\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{Par}]} = 1 \qquad \Big/ \frac{[1 + X\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{Par}]}{[1 + X\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{Par}]}$$

$$(1+\varepsilon)\cdot\frac{[1 + X\,\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{IMP}][1 + X\,\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{Par}]}{[1 - X\,\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{Par}][1 + X\,\Sigma\operatorname{ctg}\alpha''_{Par}]} = 1$$

Si los elementos $X^2$ o potencias mayores no son considerados, tendremos

$$(1+\varepsilon)\cdot\left[1 + X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP}\right]\left[1 + X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par}\right] = 1$$

$$(1+\varepsilon)\left[1 + X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par} + X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP} + \cancel{X^2\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP}\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par}}^{\,0}\right] = 1$$

$$(1+\varepsilon)\left[1 + X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par} + X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP}\right] = 1$$

$$\cancel{1} + X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par} + X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP} + \varepsilon + \cancel{\varepsilon X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par}}^{\,0} + \cancel{\varepsilon X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP}}^{\,0} = \cancel{1}$$

$$X = \frac{-\varepsilon}{\left[\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par} + \Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP}\right]}.$$

**<u>OTRA FORMA DE CALCULO de X CON MAYOR PRECISION.</u>**

$$\Pi\ sen\ \alpha_{IMPAR} = \Pi\ sen\ \alpha_{Par}$$

Se reemplazan los ángulos observados y corregidos

$$\Pi\ sen\ \alpha''_{IMPAR} - \Pi\ sen\ \alpha''_{Par} = \delta$$

Luego los ángulos se deben modificar en un valor $X$.

$$\Pi\ sen\,(\alpha''_{IMP} + X) - \Pi\ sen\,(\alpha''_{Par} - X) = 0$$

$$\Pi\ sen\ \alpha''_{IMP}(1 + X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP}) - \Pi\ sen\ \alpha''_{Par}(1 - X\,\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par}) = 0$$

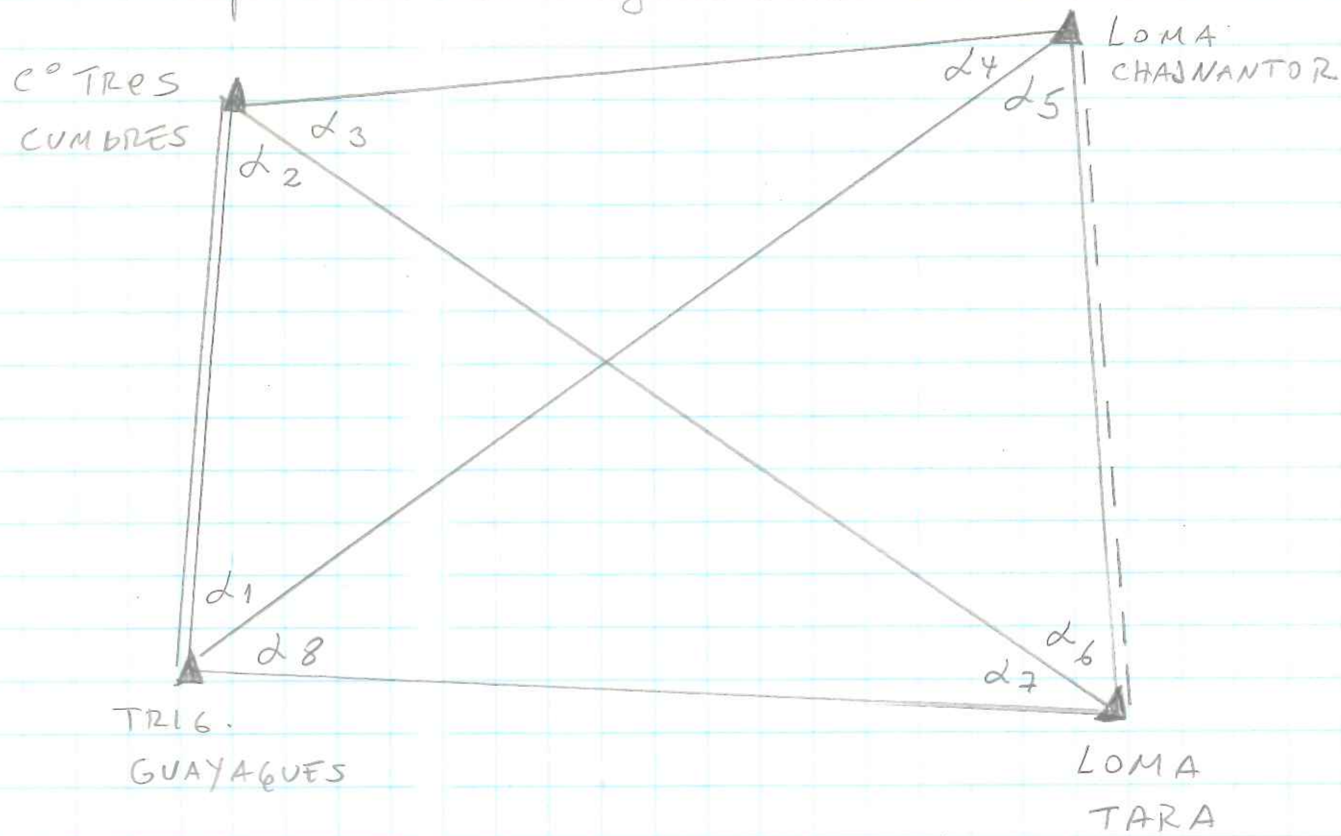
$$\Pi\ sen\ \alpha''_{IMP} + \Pi\ sen\ \alpha''_{IMP}\cdot X\Sigma\ ctg\,\alpha''_{IMP} - \Pi\ sen\ \alpha''_{Par} + \Pi\ sen\ \alpha''_{Par}\cdot X\Sigma\ ctg\,\alpha''_{Par} = 0$$

$$(\Pi\ sen\ \alpha''_{IMP} - \Pi\ sen\ \alpha''_{Par}) + X\left[\Pi\ sen\ \alpha''_{IMP}\cdot\Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP} + \Pi\ sen\ \alpha''_{Par}\cdot\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par}\right] = 0$$

$$\boxed{X'' = \frac{-\delta}{\left[\Pi\ sen\ \alpha''_{IMP}\cdot\Sigma\, ctg\,\alpha''_{IMP} + \Pi\ sen\ \alpha''_{Par}\cdot\Sigma\, ctg\,\alpha''_{Par}\right] arc\,1''}}$$

# EJERCICIO

Compensar el siguiente cuadrilátero




$m$ = N° Total de líneas = 6
$m'$ = Líneas medidas en ambas direcciones = 6
$s$ = Total de estaciones = 4
$s'$ = Estaciones ocupadas = 4

$D$ = Direcciones observadas − 2 = 12 − 2 = 10

$$C = (m' - s' + 1) + (m - 2s + 3)$$

$$C = (6 - 4 + 1) + (6 - 8 + 3)$$

$$C = 3 + 1$$

$$\boxed{C = 4}$$

Ecuaciones de ángulo = 3 $(m' - s' + 1)$
Ecuaciones de lado = 1 $(m - 2s + 3)$

$\alpha'_1 = 66°\ 54'\ 25'',35$
$\alpha'_2 = 43°\ 15'\ 27'',99$
$\alpha'_3 = 38°\ 28'\ 44'',15$
$\alpha'_4 = 31°\ 21'\ 21'',17$

$\alpha'_5 = 60°\ 14'\ 59'',31$
$\alpha'_6\ \ 49°\ 54'\ 56'',19$

$\alpha'_7 = 23°\ 25'\ 45'',83$

$\alpha'_8 = 46°\ 24'\ 21'',35$

# Desarrollo

## A) Condición de Triángulo

### A.1.- Ecuaciones de condición

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180°$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_7 + \alpha_8 = 180°$$

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 180°$$

### A.2.- Al reemplazar las mediciones en las ecuaciones de condición tendremos:

$$\begin{array}{lrrr} \alpha'_1: & 66° & 54' & 25'',35 \\ \alpha'_2: & 43° & 15' & 27'',99 \\ \alpha'_3: & 38° & 28' & 44'',15 \\ \alpha'_4: + & 31° & 21' & 21'',17 \\ \hline & 179° & 59' & 58'',66 \end{array}$$

$$d_1 = -1'',34$$

$$\begin{array}{lrrr} \alpha'_1: & 66° & 54' & 25'',35 \\ \alpha'_2: & 43° & 15' & 27'',99 \\ \alpha'_7: & 23° & 25' & 45'',83 \\ \alpha'_8: + & 46° & 24' & 21'',35 \\ \hline & 180° & 00' & 00'',52 \end{array}$$

$$d_2 = +0'',52$$

$$\begin{array}{lrrr} \alpha'_3: & 38° & 28' & 44'',15 \\ \alpha'_4: & 31° & 21' & 21'',17 \\ \alpha'_5: & 60° & 14' & 59'',31 \\ \alpha'_6: + & 49° & 54' & 56'',19 \\ \hline & 180° & 00' & 00'',82 \end{array}$$

$$d_3 = +0'',82$$

A.3 Para que se cumplan las Ecuaciones de condición, es necesario efectuar correcciones a las mediciones angulares.

$$(\alpha'_1 + v_1) + (\alpha'_2 + v_2) + (\alpha'_3 + v_3) + (\alpha'_4 + v_4) = 180°$$

$$(\alpha'_1 + v_1) + (\alpha'_2 + v_2) + (\alpha'_7 + v_7) + (\alpha'_8 + v_8) = 180°$$

$$(\alpha'_3 + v_3) + (\alpha'_4 + v_4) + (\alpha'_5 + v_5) + (\alpha'_6 + v_6) = 180°$$

A.4.- Las correcciones aplicadas a los ángulos en cada ecuación deben sumar una magnitud igual al error di pero de signo contrario.

$$C1: (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + (-1{,}34) = 0$$

$$C2: (v_1 + v_2 + v_7 + v_8) + (+0{,}52) = 0$$

$$C3: (v_3 + v_4 + v_5 + v_6) + (+0{,}82) = 0$$

Estas Ecuaciones se denominan Ecuaciones Condicionadas

A.5 - La Compensación angular se realiza mediante la utilización del Método de Mínimos Cuadrados.

$$\phi : v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2 + v_7^2 + v_8^2 \rightarrow 0$$

Definido el principio del método de ajuste es necesario encontrar una función que relacione las ecuaciones condicionadas y la función $\phi$ y las haga mínima.

$$F : \phi + 2\lambda_1 C_1 + 2\lambda_2 C_2 + 2\lambda_3 C_2 \longrightarrow 0$$

A.6.- Se hace mínima la función F, encontrando la derivada parcial de F con respecto a cada variable ($v_i$) e igualando a cero

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial v_2} = 0 \; ; \; \ldots\ldots \; \frac{\partial F}{\partial v_8} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 2v_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_2} = 2v_2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_3} = 2v_3 + 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_4} = 2v_4 + 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_5} = 2v_5 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_6} = 2v_6 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_7} = 2v_7 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_8} = 2v_8 + 2\lambda_2 = 0$$

$v_1 = -\lambda_1 - \lambda_2$ $\qquad$ $v_5 = -\lambda_3$

$v_2 = -\lambda_1 - \lambda_2$ $\qquad$ $v_6 = -\lambda_3$

$v_3 = -\lambda_1 - \lambda_3$ $\qquad$ $v_7 = -\lambda_2$

$v_4 = -\lambda_1 - \lambda_3$ $\qquad$ $v_8 = -\lambda_2$

A.8.-

$$C_1: (-\lambda_1-\lambda_2)+(-\lambda_1-\lambda_2)+(-\lambda_1-\lambda_3)+(-\lambda_1-\lambda_3)+d_1=0$$

$$C_2: (-\lambda_1-\lambda_2)+(-\lambda_1-\lambda_2)+(-\lambda_2)+(-\lambda_2)+d_2=0$$

$$C_3: (-\lambda_1-\lambda_3)+(-\lambda_1-\lambda_3)+(-\lambda_3)+(-\lambda_3)+d_3=0$$

$$C_1: -4\lambda_1-2\lambda_2-2\lambda_3+(-1'',34)=0$$

$$C_2: -2\lambda_1-4\lambda_2-0\cdot\lambda_3+(0'',52)=0$$

$$C_3: -2\lambda_1+0\cdot\lambda_2-4\lambda_4+(0'',82)=0$$

$$4\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=-1'',34$$

$$2\lambda_1+4\lambda_2+0=+0'',52$$

$$2\lambda_1+0+4\lambda_3=+0'',82$$

SOLUCION POR DETERMINANTES

$$D=\begin{vmatrix}4&2&2\\2&4&0\\2&0&4\end{vmatrix}$$

$$D=32$$

$$\lambda_1=\frac{\begin{vmatrix}-1,34&2&2\\0,52&4&0\\0,82&0&4\end{vmatrix}}{32}$$

$$\lambda_1=\frac{2(-1,34)-0,52-0,82}{4}$$

$$\lambda_1=-1,005$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1,34 & 2 \\ 2 & 0,52 & 0 \\ 2 & 0,82 & 4 \end{vmatrix}}{32}$$

$$\lambda_2 = \frac{-2\cdot(-1,34) + 3\cdot 0,52 + 0,82}{8}$$

$$\lambda_2 = 0,6325$$

$$\lambda_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1,34 \\ 2 & 4 & 0,52 \\ 2 & 0 & 0,82 \end{vmatrix}}{32}$$

$$\lambda_3 = \frac{-2(-1,34) + 0,52 + 3\cdot 0,82}{8}$$

$$\boxed{\lambda_3 = +0,7075}$$

Reemplazamos los valores de $\lambda i$ en las correcciones $\nu i$.

$$\nu_1 = -(-1,005) - 0,6325$$
$$\nu_2 = -(-1,005) - 0,6325$$
$$\nu_3 = -(-1,005) - 0,7075$$
$$\nu_4 = -(-1,005) - 0,7075$$
$$\nu_5 = -0,7075$$
$$\nu_6 = -0,7075$$
$$\nu_7 = -0,6325$$
$$\nu_8 = -0,6325$$

$\nu_1 = 0,3725$

$\nu_2 = 0,3725$

$\nu_3 = 0,2975$

$\nu_4 = 0,2975$

$\nu_5 = -0,7075$

$\nu_6 = -0,7075$

$\nu_7 = -0,6325$

$\nu_8 = -0,6325$

Verificando las correcciones en las ecuaciones condicionales tendremos:

$$C_1: (0,3725 + 0,3725 + 0,2975 + 0,2975) + (-1'',34) = 0$$

$$(+1'',34) + -1'',34 = 0$$

$$C_2: (0,3725 + 0,3725 - 0,6325 - 0,6325) + 0,52 = 0$$

$$(-0'',52) + 0,52 = 0$$

$$C_3: (0,2975 + 0,2975 - 0,7075 - 0,7075) + 0,82 = 0$$

$$(-0'',82) + 0,82 = 0$$

$$\alpha''_1 = \alpha'_1 + N_1 = 66° 54' 25'',35 + 0'',3725 = 66° 54' 25'',7225$$

$$\alpha''_2 = \alpha'_2 + N_2 = 43° 15' 27'',99 + 0'',3725 = 43° 15' 28'',3625$$

$$\alpha''_3 = \alpha'_3 + N_3 = 38° 28' 44'',15 + 0'',2975 = 38° 28' 44'',4475$$

$$\alpha''_4 = \alpha'_4 + N_4 = 31° 21' 21'',17 + 0'',2975 = 31° 21' 21'',4675$$

$$\alpha''_5 = \alpha'_5 + N_5 = 60° 14' 59'',31 + -0'',7075 = 60° 14' 58'',6025$$

$$\alpha''_6 = \alpha'_6 + N_6 = 49° 54' 56'',19 + -0'',7075 = 49° 54' 55'',4825$$

$$\alpha''_7 = \alpha'_7 + N_7 = 23° 25' 45'',83 + -0'',6325 = 23° 25' 45'',1975$$

$$\alpha''_8 = \alpha'_8 + N_8 = 46° 24' 21'',35 + -0'',6325 = 46° 24' 20'',7175$$

$$\begin{array}{lr}
\alpha''_1 & 66^\circ\ 54'\ 25'',7225 \\
\alpha''_2 & 43^\circ\ 15'\ 28'',3625 \\
\alpha''_3 & 38^\circ\ 28'\ 44'',4475 \\
\alpha''_4\ + & 31^\circ\ 21'\ 21'',4675 \\
\hline
 & 180^\circ\ 00'\ 00'',0000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
66^\circ\ 54'\ 25'',7225 & \alpha''_1 \\
43^\circ\ 15'\ 28'',3625 & \alpha''_2 \\
23^\circ\ 25'\ 45'',1975 & \alpha''_7 \\
+\ 46^\circ\ 24'\ 20'',7175 & \alpha''_8 \\
\hline
180^\circ\ 00'\ 00'',0000 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
 & 38^\circ\ 28'\ 44'',4475 & \alpha''_3 \\
 & 31^\circ\ 21'\ 21'',4675 & \alpha''_4 \\
 & 60^\circ\ 14'\ 58'',6025 & \alpha''_5 \\
+ & 49^\circ\ 54'\ 55'',4825 & \alpha''_6 \\
\hline
 & 180^\circ\ 00'\ 00'',0000 &
\end{array}$$

## B.- CONDICION DE LADO

$$\frac{\prod \operatorname{sen} \alpha_{IMPAR}}{\prod \operatorname{sen} \alpha_{PAR}} = 1$$

Al incorporar los valores observados y ajustados en la Ecuación de condición tendremos:

$$\prod \operatorname{sen} \alpha''_{IMPAR} - \prod \operatorname{sen} \alpha''_{PAR} = \delta$$

$$0,197586565 - 0,1975908465 = -0,0000042815$$

Se calcula la Corrección $x''$

$$x'' = \frac{+0,0000042815}{(0,9017251566 + 0,8886748332)\operatorname{arc} 1''}$$

$$\boxed{x'' = +0'',4932}$$

$$\alpha'''_1 = \alpha''_1 + x = 66°\,54'\,25'',7225 + 0,4932 = 66°\,54'\,26'',2157$$
$$\alpha'''_2 = \alpha''_2 - x = 43°\,15'\,28'',3625 - 0,4932 = 43°\,15'\,27'',8693$$
$$\alpha'''_3 = \alpha''_3 + x = 38°\,28'\,44'',4475 + 0,4932 = 38°\,28'\,44,9407$$
$$\alpha'''_4 = \alpha''_4 - x = 31°\,21'\,21'',4675 - 0,4932 = \underline{31°\,21'\,20,9743}$$
$$180°\,00'\,00,0000$$

$$\alpha'''_1 = \alpha''_1 + x = 66°\,54'\,25'',7225 + 0,4932 = 66°\,54'\,26'',2157$$
$$\alpha'''_2 = \alpha''_2 - x = 43°\,15'\,28'',3625 - 0,4932 = 43°\,15'\,27'',8693$$
$$\alpha'''_7 = \alpha''_7 + x = 23°\,25'\,45,1975 + 0,4932 = 23°\,25'\,45'',6907$$
$$\alpha'''_8 = \alpha''_8 - x = 46°\,24'\,20,7175 - 0,4932 = \underline{46°\,24'\,20,2243}$$
$$180°\,00'\,00'',0000$$

$$\alpha'''_3 = \alpha''_3 + x = 38°\,28'\,44'',4475 + 0,4932 = 38°\,28'\,44'',9407$$
$$\alpha'''_4 = \alpha''_4 - x = 31°\,21'\,21'',4675 - 0,4932 = 31°\,21'\,20,9743$$
$$\alpha'''_5 = \alpha''_5 + x = 60°\,14'\,58'',6025 + 0,4932 = 60°\,14'\,59,0957$$

$$\alpha'''_6 = \alpha''_6 - x = 49°\,54'\,55'',4825 - 0,4932 = \underline{49°\,54'\,54'',9893}$$
$$180°\,00'\,00,0000$$

$$\prod \text{sen}\,\alpha'''_{\text{IMPAR}} - \prod \text{sen}\,\alpha'''_{\text{PAR}} = 0$$

$$0,1975887212 - 0,1975887216 = 0,0000000004$$

Las 4 unidades del décimo decimal se estiman como no relevante, razón por la cual se da el cuadrilátero como completamente ajustado.