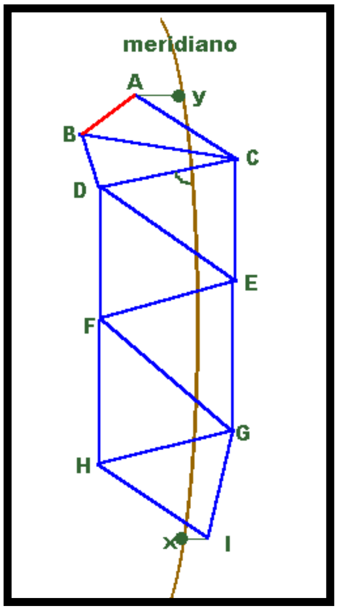
INDICE

FORMA DE LA TIERRA

Desde tiempos inmemoriales el hombre ha tratado de conocer la Tierra en la cual habita. Al comienzo tuvo curiosidad por conocer el horizonte más cercano, la necesidad de encontrar mejores climas y praderas para su subsistencia, luego su necesidad de comunicarse con otros pueblos lo lleva a traspasar sus fronteras naturales, creando sendas, huellas y caminos le permiten llegar a otros lugares más lejanos y conocer nuevas culturas, el comercio acerca a los pueblos y se desarrollan los medios de transporte terrestre y marítimo, no obstante, se carece de planos y cartas que le permitan orientarse correctamente, poder planificar los tiempos de viaje, conocer el espacio físico donde se encuentra y de los lugares nuevos donde comienza a explorar. Esto conduce a la necesidad de elaborar cartas que representan grandes extensiones de la tierra donde poder dibujar los nuevos lugares descubiertos, los senderos, huellas, caminos y poblaciones existentes, como consecuencia de esta necesidad se hace necesario conocer las dimensiones y forma de la tierra.

Los filósofos griegos fueron los primeros en estudiar la forma y dimensiones de la tierra. En sus primeras aseveraciones postularon una tierra con forma de un disco plano, forma proclamada por Homero. Anaxímenes postula una tierra con forma rectangular, posteriormente Pitágoras, filósofo y matemático, concibe la tierra como una esfera, otros estudiosos de la época sugirieron formas planas, rectangulares, cilíndricas y otras parecidas. Esta última idea tuvo numerosos partidarios, Platón realizó estudios que le permitieron conocer sus dimensiones al igual que Arquímides, ambos entregaron valores estimativos. En esa misma época Eratóstheres, filósofo griego que vivía en Egipto fue probablemente el primero en hacer mediciones y calcular el tamaño de la esfera, siglo III a. C., a pesar de una gran cantidad de suposiciones completamente erróneas sus resultados relativos a los cálculos de la circunferencia fueron realmente asombrosos para la época (25.000 millas) tomando en consideración los escasos medios que disponía para sus estudios. Es necesario además mencionar a Posidonio, el cual llegó a un valor de la circunferencia de la tierra de 18.000 millas, este valor fue adoptado por Tolomeo en sus mapas del mundo, los cuales influenciaron fuertemente a los cartógrafo de la Edad Media.



En los tiempos de la Edad Media, la Geodesia no se desarrolla y más aún experimentó un fuerte retroceso, predominó la idea de los partidarios de una tierra plana. Esta situación se mantiene hasta los siglos XV y XVI cuando la razón nuevamente impera, con Galileo defendiendo una tierra esférica y Cristóbal Colón intentándolo probar.

En el siglo XVII con el uso del telescopio las tablas de logaritmos y el método de triangulación la geodesia tiene un gran impulso, fue posible medir las distancias y la gravedad con la precisión necesaria para poder entender que la curvatura de la tierra no era igual en todas partes, esto implicaba dejar de lado la teoría de que la tierra era una esfera, esto permitía concluir que la tierra era aproximadamente un elipsoide.

En 1735 la Academia Francesa de Ciencias decidió enviar dos expediciones, con la finalidad de que midieran la longitud de un arco de un grado a lo largo de un meridiano, uno cerca del polo y el otro cerca de ecuador, para comparar la longitud del arco de meridiano tanto en el polo como en el ecuador; se midió un arco en Laponia en el norte, y otro en el Perú cerca del Ecuador.

Si un arco de un grado de longitud en un meridiano, cerca del polo, era más largo que la longitud de un arco de meridiano cerca del Ecuador, entonces la tierra no era una esfera, sino, un sólido achatado en los Polos. El resultado de las mediciones realizadas por las dos expediciones enviadas por la Academia de Ciencias de Francia, fue que la tierra no era una esfera perfecta, sino, un sólido achatado en los polos, tal como lo había postulado Newton en sus estudios.

La superficie de la tierra, dista mucho de ser uniforme. Los océanos presentan una superficie bastante regular, pero la topografía de la tierra muestra grandes variaciones en altura entre montañas y valles, lo cual dificulta expresar la forma, sobre un área de gran tamaño, mediante un modelo matemático simple.

No teniendo la superficie de la tierra una forma matemáticamente perfecta, su representación cartográfica, así como la resolución de las mediciones efectuadas en ella, constituyen un problema de difícil solución, sin embargo, los geodestas han tratado de salvar esta situación mediante la adopción de la figura de la tierra como aquella en la cual se encuentra la superficie del mar en calma, en la cual se supone esta superficie libre de los continentes, prescindiendo de todas las causas que alterarían este equilibrio, tales como; mareas, vientos, corrientes, presión atmosférica, etc. La superficie así formada recibe el nombre de GEOIDE, la que se define como una superficie de nivel normal en todo sus puntos a la dirección de la gravedad y que presenta la siguiente propiedad:

> “ El plano tangente a cualquiera de sus puntos es normal a la dirección de la gravedad”

Como el GEOIDE es una superficie equipotencial, el potencial gravitacional en cualquiera de sus puntos será el mismo y la dirección de la gravedad en cualquier punto de él será perpendicular al GEOIDE.

Es importante entender que el Geoide es sólo una de las infinitas familias de superficies equipotenciales posibles, cada una de ellas con un potencial gravitacional diferente. El Geoide se ha considerado como la superficie equipotencial que corresponde **al Nivel Medio del Mar**.

Si la tierra tuviera una densidad uniforme y la topografía de ella no fuera irregular, el Geoide tendría la forma de un ELIPSOIDE, centrado sobre el centro de masa de la tierra. Este sólido es la superficie que más se aproxima al Geoide y para el cual se definen las siguientes características:

" *La tierra es un Elipsoide de Revolución, achatado en los polos, siendo la vertical en cada punto perpendicular a la superficie del Elipsoide, y el eje de rotación de la tierra es el eje de rotación del Elipsoide de Revolución.* "

Los efectos sobre el Geoide debido a las variaciones en la densidad de la tierra son los siguientes:

a) Donde existe deficiencia de masa, el Geoide se hundirá por debajo del Elipsoide y
b) Donde existe un exceso de masa, el Geoide se levantará por sobre el Elipsoide

La solución matemática encontrada para poder calcular las mediciones realizadas sobre la superficie de la tierra y poder posteriormente representar a esta en un plano o carta, ha sido de asimilar a la forma física de la Tierra un sólido de revolución denominado **Elipsoide de Revolución**, el cual se genera al girar una elipse por su eje polar. Esto ha permitido a los geodestas y profesionales de las ciencias de la tierra poder realizar sus mediciones y posteriormente representarlas adecuadamente en una determinada proyección cartográfica.

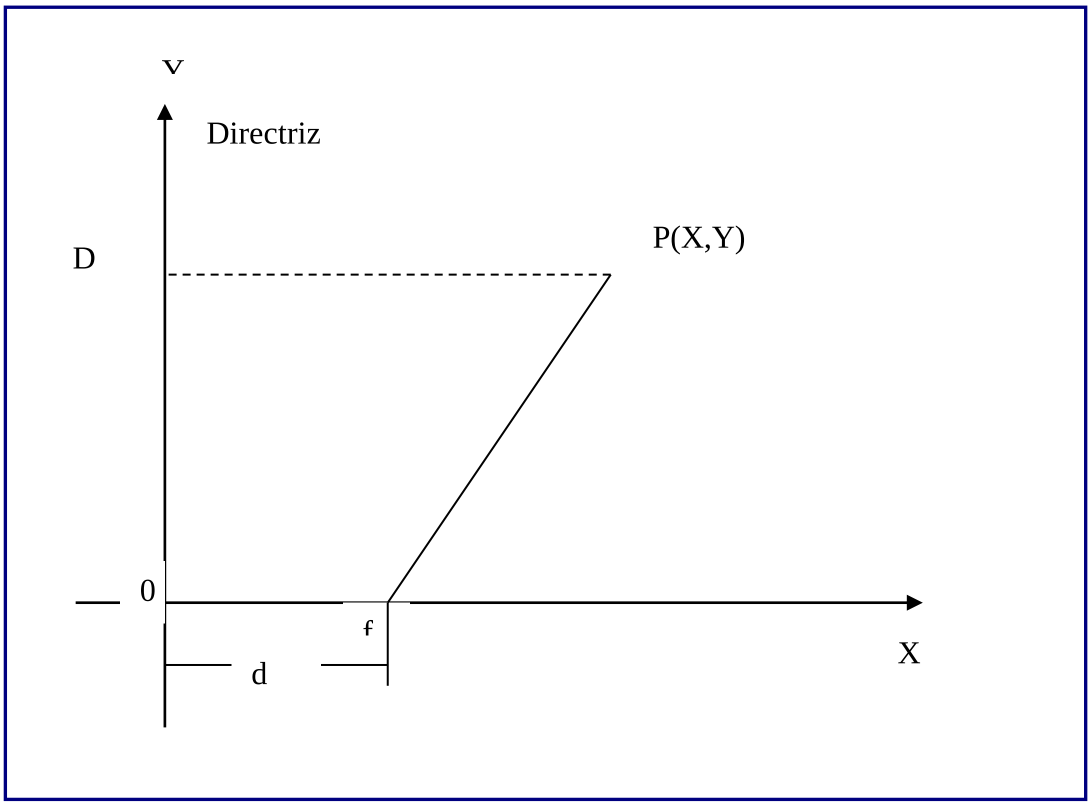
I. GEOMETRIA DE LA ELIPSE MERIDIANA

ELIPSE

(e < 1)

La Elipse forma parte de la familia de las cónicas, su estudio es importante en Geodesia, ya que esta curva al girar por su eje menor, eje polar, genera un sólido de revolución denominado elipsoide, este sólido se asocia como el modelo matemático de la tierra.

Figura 1



PF/PD = e

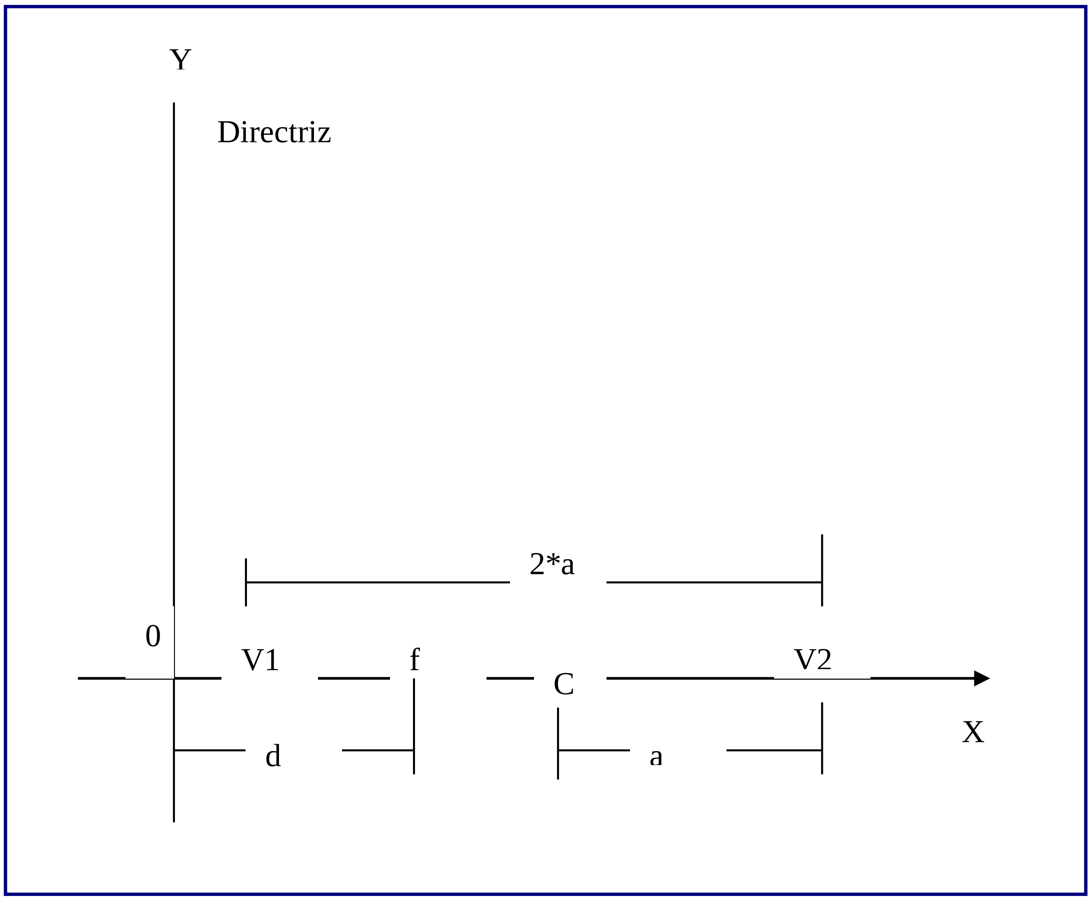
$$e = \sqrt{((x-d)^2 + y^2} / x$$

ECUACION GENERAL

$$(x - d)^2 + y^2 = e^2 * x^2$$

En la elipse existen 2 vértices: V1 = d/(1+e), 0 ; V2 = d/(1-e), 0

Figura 2



Llamaremos eje mayor de la Elipse, que denotamos por 2*a, a la distancia entre vértices, "**a** "es el semi-eje mayor de la elipse. Se llama centro de la elipse, que denotamos por "**c**", al punto medio de V1 y V2, luego se tiene que:

2*a =   0V2 - 0V1

2*a = d/(1-e) - d/(1+e) = (d(1+e) - d(1-e))/(1-e^2)

2*a = 2*d*e/(1-e^2), finalmente tendremos;   **a =(d*e) /(1-e^2)**

Si tenemos que:

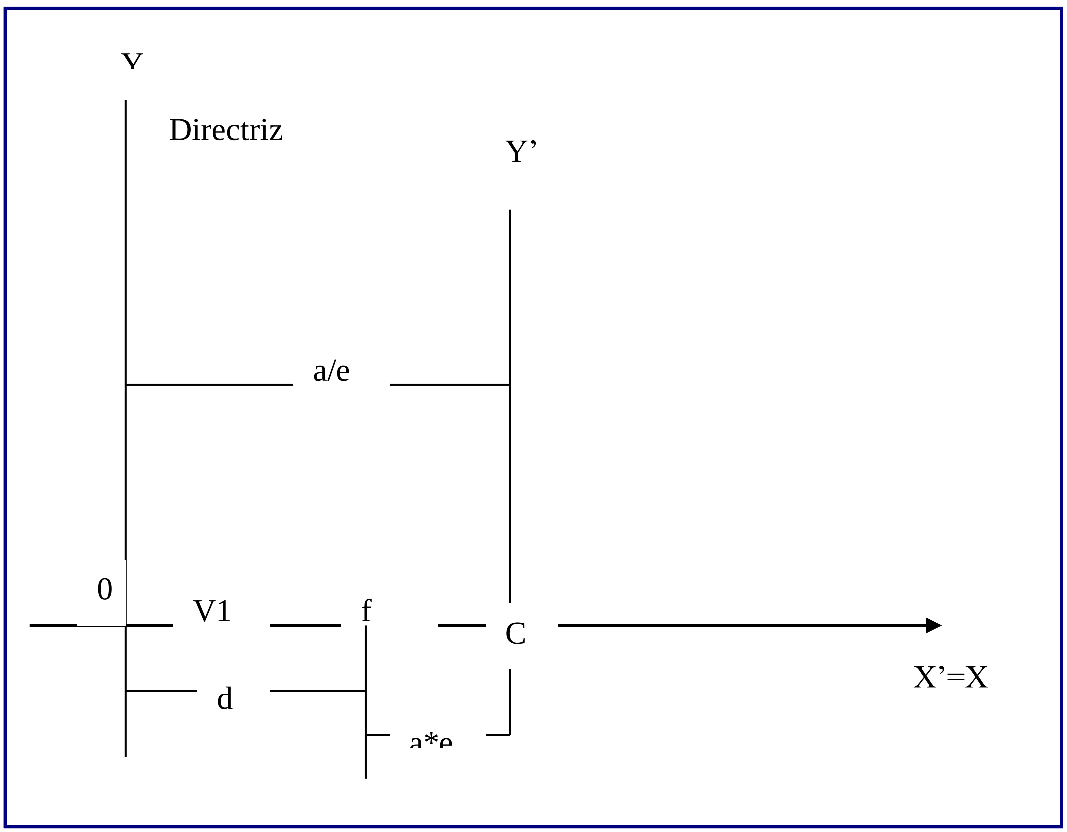
C = 1/2 *((d/ (1+e) + (d/ (1-e))) = 1/2* ((d*(1-e) + d*(1+e))/(1-e^2))

C = 1/2*(2*d)/(1-e^2)

C = d/(1-e^2), finalmente tenemos que;   **C= a/e**,

d=a/e - a*e   ;   h=a/e

Figura 3



De la ecuación general de la cónica

$(x-d)^2 + y^{2\ =}\ e^2 * x^2$

Obtendremos la ecuación de la elipse central

$x = x'+h$; $x= x? + a/e$

$y = y'$

$(y' + a/e - a/e + a*e)^2 + y' = e^2*(x' + a/e)^2$

$(x' + a*e)^2 + y' = e^2x'^2 + 2*x'*e^2* (a/e) + e^2*(a^2/e^2)$

$x'^2 + a^{2*e}e^{2\,+}y'^2 = e^2*x'^2 + e^2*(a^2/e^2)$

$x'^2*(1-e^2) + y'^2 = -a^2*e^2 + a^2$

Sí $b^2 = a^2*(1-e^2)$

$x'^2*(1-e^2) + y'^{2\,=}\, b^2$

$x'^{2\,*}* b^2/a^2 + y'^{2\,=}b^2$ / $*(1/b^2)$

$x'^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1$

Entonces tendremos:

$\mathbf{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1}$; Ecuación de la elipse centrada en el origen.

Se llama semi-eje menor de la elipse a b, donde $b= a*\sqrt{(1-e^2)}$; como $e<1$ entonces: $a>b$, luego de la ecuación de la elipse:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 =1$

$x^{2\,=}\, a^{2\,*}(1-y^2/b^2)$

$x^2 = a^2/b^2 *(b^2-y^2)$; $b^2-y^2 >= 0$

Por lo tanto $-b =< y =< b$

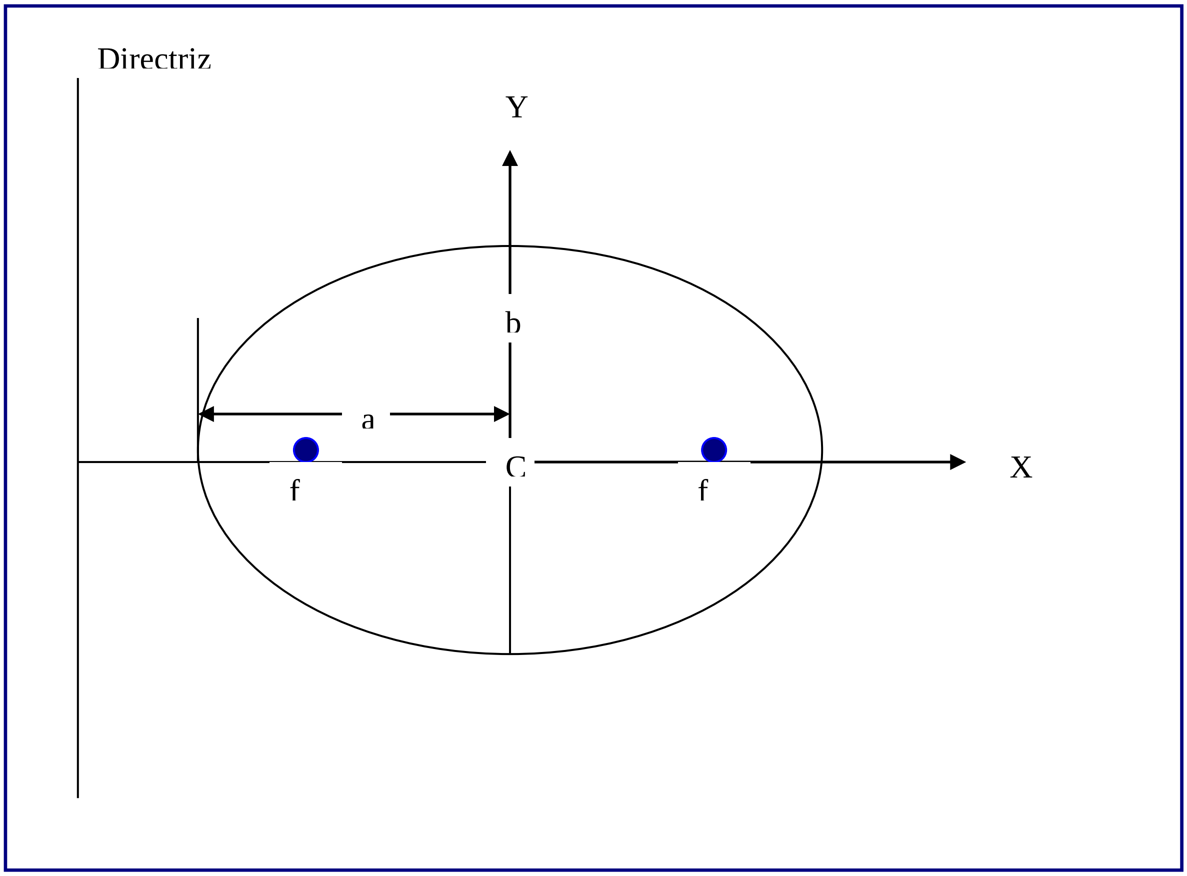
en forma análoga, en el eje y

$y^2 = b^2 * (a^2 - x^2)$; $a^2 - x^2 >= 0$, por lo tanto $a^2 >= x^2$, luego tendremos que; $-a =< x =< a$

Esto nos lleva a concluir que la elipse es una curva cerrada, como

se muestra en la figura 4

Figura 4



1.1. -RELACIONES

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

1. - Centro : C = (0,0)

2. - Vértices: V = (+/- a,0)

3. - Focos : F = (+/- a*e,0)

4. - Excentricidad: e = c/a

5. - p : $p = b^2/a$

6. - Directrices : x = +/- a/e

$b^2 = a^2 * (1-e^2)$; $e^2 = (a^2-b^2)/a^2$; $e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$

Luego estamos en condiciones de definir algunos parámetros principales de la elipse.

1. - Achatamiento Polar : f : f = (a-b)/a

2. - Primera Excentricidad: e: $e = OF2/a = \sqrt{(a^2 - b^2)/a}$; $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$

$$(OF2)^2 + b^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad OF2 = \sqrt{(a^2 - b^2)}$$

3. - Segunda Excentricidad : e'

$e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$

4. - Excentricidad Angular : α

COS α = b/a ; f = a/a - b/a ; f = 1-b/a ; luego 1-f = b/a

COS α = 1- f

SEN α = 0F2/a ; $OF2 = \sqrt{(a^2 - b^2)}$

SEN α = $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ /a

TAN α = 0F2/b = e'

1) $e^2 = 2*f - f^2 = f*(2 - f)$

2) $e'^2 = e^2/(1- e^2)$

3) b/a = (1-f) = $\sqrt{(1-e^2)}$ = e/e'

4) $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 1 - b^2/a^2$

5) $b^2/a^2 = 1 - e^2$

6) $f = 1 - b/a$

7) $(1 - e^2) = (1 - f)^2$

8) $(1 - e^2) = 1 - 2*f + f^2$

1.2. EJERCICIOS:

1. - Hallar elementos de: $x^2/16 + y^2/9 = 1$

Solucionando tendremos: a = 4; b = 3; Centro = (0,0)

Vértices = (+/- 4,0)

Excentricidad (e) = $\sqrt{\frac{(16+9)}{16}}$; e = $+/-(\frac{1}{4}\sqrt{7})$

Focos (F) = (+/- $\sqrt{7}$,0)
Directrices: x= +/- a/e; entonces x= +/- 4/(1/4 * $\sqrt{7}$) ;

Luego x=+/- (16/* $\sqrt{7}$)

2. - Encontrar elemento de: 2x2 +4y^2 +12x +10 = 0

Formaremos un cuadrado de binomio con los elemento de x, para lo cual se sumará 9 en ambos lados de la ecuación siguiente:

$x^2 + 6x + 9 + 2y^2 + 5 = 9$

$(x+3)^2 + 2y^2 = 4$; dividiendo por 4 se tendrá:

$(X + 3)^2 /4 + y^2/2 = 1$; luego de formada la ecuación de la elipse, se identificará los elementos de ella, esta elipse se encuentra desplazada en el eje X :

a= 2 b= $\sqrt{2}$; $(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$; h = -3 , k = 0

Centro = (h,k) = (-3,0)

Vértices = (h+/- a,k) = (-3 +/- 2, 0)

Focos = (h+/- C, k) = (-3 +/- $\sqrt{(4-2)}$, 0)

Excentricidad (e) = $\sqrt{2}$ /2

Directrices: X = -3 +/- ($\frac{4}{\sqrt{2}}$)

3.- Hallar Ecuación de la Elipse:

Vértices: (4,0) y (-4,0)

Focos : (3,0) y (-3,0)

Planteamos la ecuación general de la elipse: $(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$

h = 0 y k = 0 ; luego se tiene que : a= 4 ; Centro = (0,0)

$a^2 = CF^2 + b^{2;}$ $16 = 9 + b^2$; luego, b = $\sqrt{(16-9)}$; b = $\sqrt{7}$

La ecuación general de la elipse para este caso es el siguiente:

$$\boxed{x^2/16 + y^2/7 = 1}$$

4.- Hallar la ecuación de la Elipse: Vértices: (1,1) y (7,1) , e = 1/3

(1+7)/2 =4 ; Centro =(4,1) ; h = 4 y k= 1 ; 2a = 7-1 = 6 ; a = 3

$e^2 = (a2 - b^2)/a^2$; $1/9= 1 - b^2/9$;

$(1- 1/9) * 9 = b^2$; $\sqrt{8} = b$;

Por lo tanto la ecuación de esta Elipse es la siguiente:

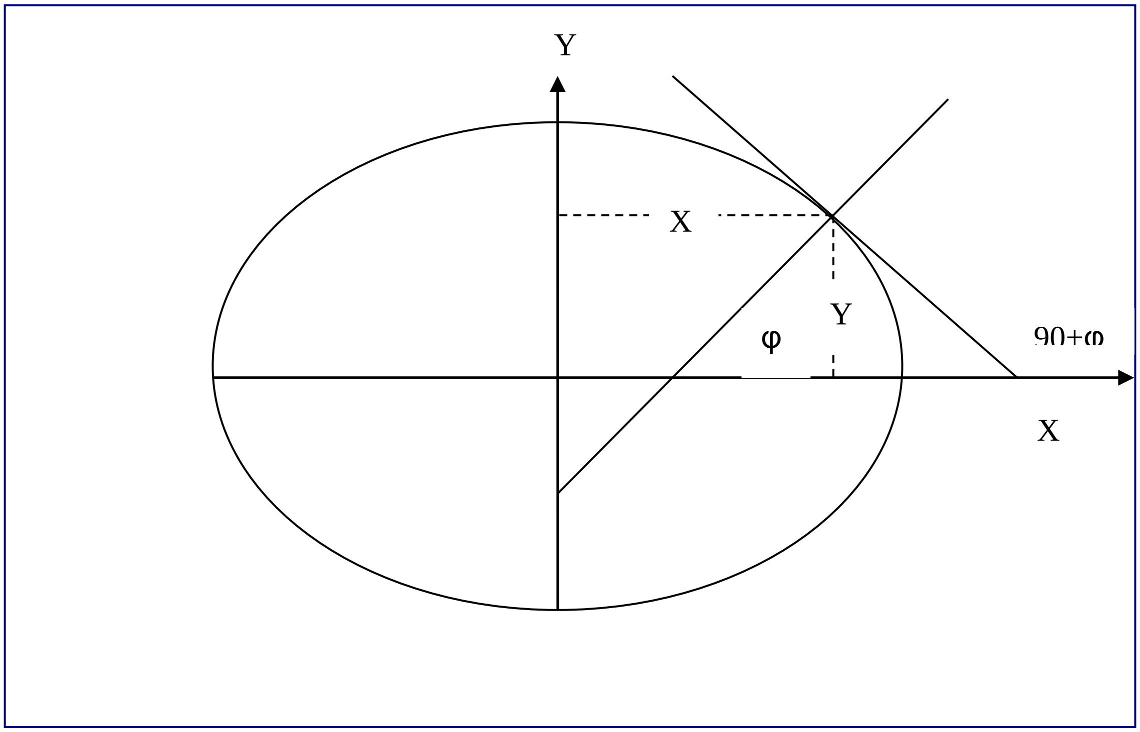
$$\boxed{x^2/9 + y^2/8 = 1}$$

Tabla 1 Elipsoides

NOMBRE	AÑO	a	f	USADO EN
EVEREST	1830	6377276	1/300.8	INDIA
AIRY	1830	6377563	1/299.3	Gran Bretaña
BESSEL	1841	6377397	1/299.15	JAPÓN, Korea
CLARKE	1866	6378206,4	1/295	AMERICA DEL NORTE
FAYE	1880	6.378.249,145	1/293,465	FRANCIA- AFRICA
HELMERT	1907	6.378.200	1/298,3	EGIPTO
INTERNACIONAL	1924	6.378.388	1/297	EUROPA-S. AMÉRICA
Krassowy	1940	6.378.245	1/298,3	RUSIA
FISCHER	1960	6.378.155	1/298,3	Asia
FISCHER	1968	6.378.150	1/298,3	
W.G.S. 66	1966	6.378.145	1/298,25	S. G. M.
Sudamericano	1969	6.378.160	1/298,25	Sudamérica
W.G.S. 72	1972	6.378.135	1/298,25	S. G. M. (Dopler)
W.G.S. 84	1984	6.378.137	1/298,2572235	S. G. M. (GPS)
PZ-90	1990	6378136	1/298,257839	S.G.P. (Glonas)
SAD-69	1969	6378160	1/298,25	Sudamérica
GRS-80	1980	6378137	1/298,257222102	(IUGG-80)

II. COORDENADAS CARTESIANAS

Figura 5



COORDENADA X

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2 b^2$

Diferenciando con derivadas parciales tendremos :

$2xb^2 \, dx + 2a^2y \, dy = 0$; $xdx = -a^2y/b^2 \, dy$; $x = (-a^2/b^2)\, y \, dy/dx$

$(a^2-b^2)/a^2 = e^2$; entonces : $e^2 = 1 - b^2/a^2$; $1-e^2 = b^2/a^2$

$x = -(1/(1-e^2))\ y\ dy/dx$

$dy/dx = Tag\ (90 + \varphi) = Ctg\ \varphi$
$x = -(1/(1-e^2))\ y\ (-Ctg\ \varphi)$; $y = (1-e^2)\ x\ /Ctg\ \varphi$; $y = (1-e^2)\ x\ Tag\ \varphi$

$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2\ b^2$; dividiendo la expresión por $1/b^2$, nos queda

$x^2 + y^2\ a^2/b^2 = a^2$; $x^2 + x^2\ (1- e^2)\ Tag^2\ \varphi\ (1/(1-e^2)) = a^2$

$x^2\ [\ 1 + (1 -e^2)\ Tag^2\ \varphi\ ] = a^2$

$x^2 = a^2 / (1 + (1-e^2)Tan^2\ \varphi)$; $x^2 = a^2 / (1 + (1-e^2)\ sen^2\ \varphi/Cos^2\ \varphi)$

$x^2 = a^2\ Cos^2\ \varphi/(\ Cos^2\ \varphi + (1-e^2)Sen^2\ \varphi)$;

$x^2 = a^2\ Cos^2\ \varphi\ /(\ Cos^2\ \varphi + Sen^2\ \varphi - e^2\ Sen^2\ \varphi)$

$x^2 = a^2\ Cos^2\ \varphi/\ (1- e^2\ Sen^2\ \varphi)$

$$\boxed{\mathbf{X = a\ Cos\ \varphi\ /\ (1- e^2\ sen^2\ \varphi)^{1/2}}}$$

COORDENADA Y

$X =(\ 1/(1-e\ )\ )Y\ Ctg\ \varphi$; $x^2\ b^2 + y^2\ a^2 = a^2\ b^2$; dividiendo por $1/a^2$, tenemos

$x^2\ b^2/a^2 + y^2 = b^2$; $(1/(1-e^2))\ y^2\ Ctg^2\varphi\ b^2/a^2 + y^2 = b^2$

$Y^2\ [\ 1+ Ctg^2\varphi/(1-e^2)\ ] = b^2$; $Y^2 = b^2 /(\ 1 +Ctg^2\varphi/(1-e^2))$

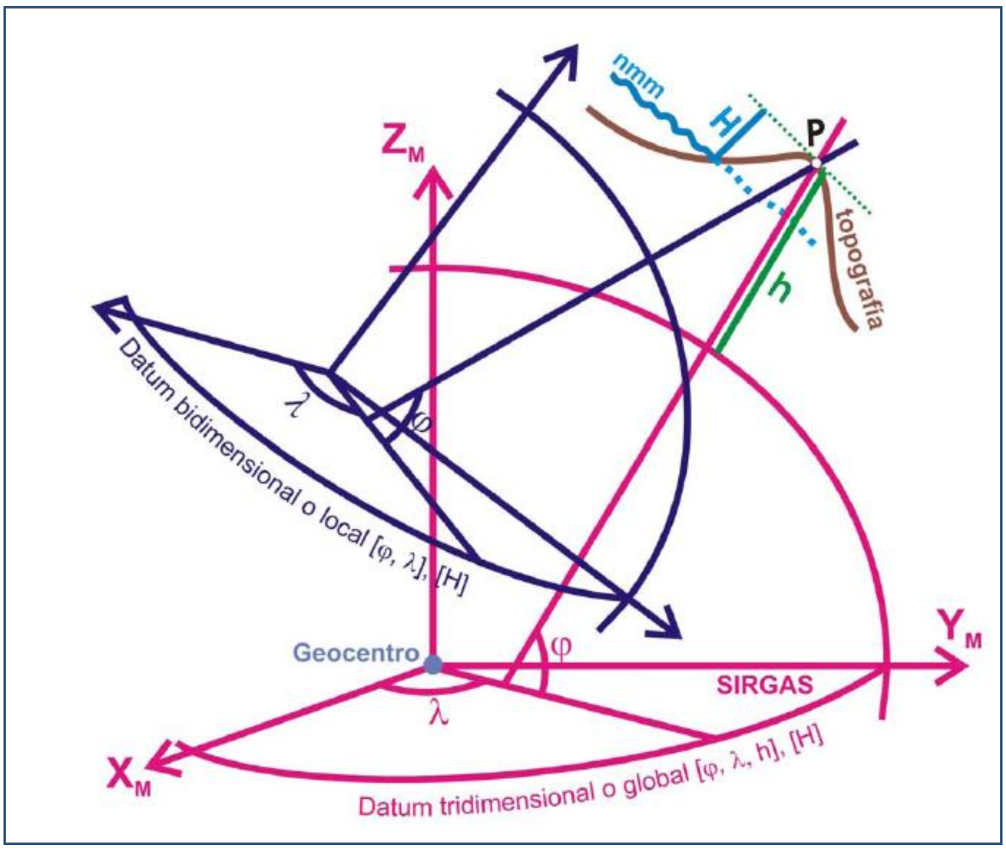
$Y^2 = b^2\ (1-e^2\ )\ Sen^2\varphi/((1-e^2\ )Sen^2\varphi + Cos^2\ \varphi)$

$Y^2 = a^2 (1-e^2)^2 Sen^2\varphi/(1-e^2 Sen^2\varphi)$

$$\boxed{Y = a(1-e) Sen\varphi/(1-e Sen\varphi)^{1/2}}$$

CALCULO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONALES

Coordenadas rectangulares: X, Y, Z son coordenadas cartesianas con respecto a una terna de ejes fijos a la Tierra con origen en su baricentro. X está dirigido al meridiano de Greenwich y Z hacia el Polo



Las coordenadas elipsoidales

Las coordenadas cartesianas no son prácticas para visualizar la localización de un punto, de manera que las tradicionales Latitud, Longitud y altura elipsoidal mantienen plenamente su vigencia.

Es claro que la definición de las coordenadas geodésicas requiere el agregado de un nuevo elemento, un elipsoide asociado al sistema cartesiano. Asociado quiere decir que el centro del elipsoide coincide con el origen del sistema cartesiano, que está orientado de manera que los ejes X, Y yacen en el plano ecuatorial del elipsoide, que el meridiano que contiene a los ejes X y **Z** es el origen *de* las longitudes, y que el eje menor del elipsoide coincide con el eje Z.

No obstante, diversos elipsoides podrían cumplir con estas condiciones. El elipsoide de referencia queda completamente determinado con dos parámetros: el semieje mayor a y el achatamiento f, que fijan respectivamente el tamaño y la forma.

$$X = ((N + h) * cos\varphi * cos\lambda$$

$$Y = (N + h) * cos\varphi * sen\lambda$$

$$Z = [N * (1 - e^2\ ) + h] * sen\lambda$$

III RADIOS DE CURVATURA EN EL ELIPSOIDE

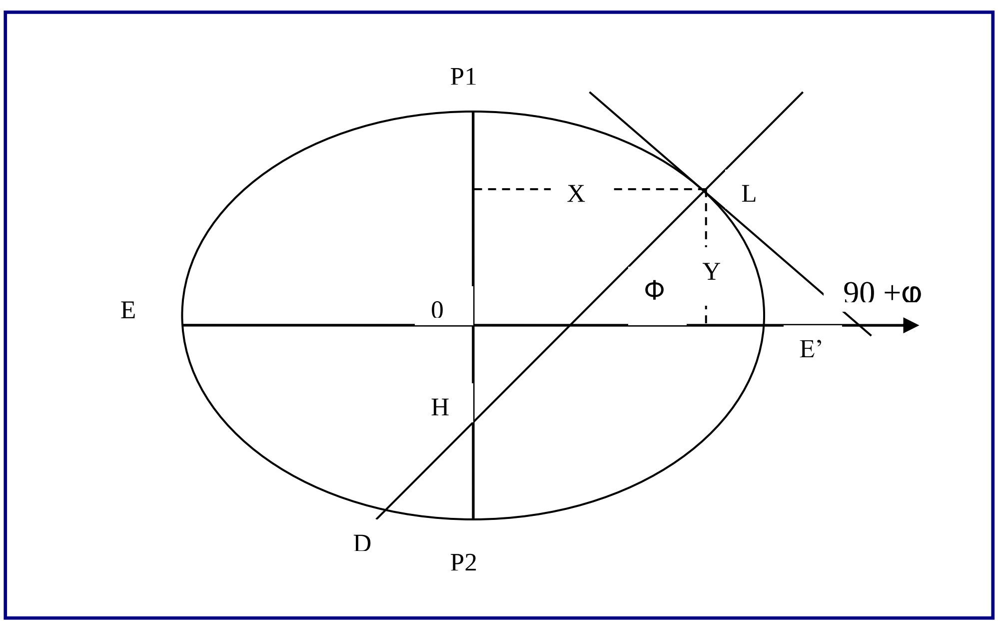
Todos los planos que pasan por la normal a un punto del Elipsoide cortan a este según unas secciones denominadas SECCIONES NORMALES que en la mayoría de los casos son Elipses.

De las infinitas Secciones Normales que pueden trazarse desde un punto L del Elipsoide, hay que distinguir dos:

1.- La Sección Meridiana, P1E'P2E
2.- La Sección Normal Principal, representado por la recta LD. Esta Sección es normal a la Sección Meridiana.

Estas dos Secciones se denominan Secciones Principales; a la Sección Meridiana le corresponde el radio mínimo de curvatura y a la Sección Normal le corresponde el radio máximo de curvatura.

Figura 6



Para hallar el radio de curvatura en una dirección arbitraria podemos utilizar la fórmula de EULER:

$$\boxed{1/R = Cos^2 \alpha /\rho + Sen^2 \alpha/N}$$

Donde R es el radio de curvatura arbitrario; α es el ángulo medido desde la Sección principal, N es una dirección normal y principal, ρ es el radio de curvatura en la dirección de la otra dirección normal principal.

3.1 RADIO DE CURVATURA EN EL MERIDIANO (ρ= M)

Considerar la determinación de ρ si tenemos una curva plana especificada como Z= f(x), el radio de curvatura ρ es un punto sobre la curva, es el valor recíproco de la curvatura en ese punto, luego:

$$\boxed{\rho = \frac{1}{R} = \frac{(1+y')^{3/2}}{y''}}$$

Siendo y’ e y” la primera y segunda derivada de Y respecto a X

$dy/dx = Tg\ (90º + \varphi) = -Ctg\ \varphi = -Cos\varphi /Sen\varphi$; luego tendremos :

$d^2y/dx = -(-Cosec^2 \varphi\ d\varphi/dx) = Cosec\ \varphi\ d\varphi/dx$

$d^2y/dx =(1/Sen^2\varphi)\ d\varphi /dx$; si : $X = (aCos\varphi)/(1-e^2Sen^2\varphi)^{1/2}$; diferenciando la expresión nos da : $a [Cos\varphi (1-e^2sen^2\varphi)^{-1/2}]$;

$$dx/d\varphi=a[-sen\varphi(1-e^2sen^2\varphi)^{-1/2}+Cos\varphi(-1/2)(1-e^2sen^2\varphi)^{-3/2}(-e^2 2Sen\varphi Cos\varphi)]$$

$dx/d\varphi = a\ [\ -sen\varphi(1-e^2sen^2\varphi)^{-1/2} - 1/2\ Cos\varphi e^2\ 2\ sen\varphi Cos\varphi(1-e^2Sen^2\varphi)^{-3/2}\ ]$

$= a\ [-sen\varphi(1-e^2sen^2\varphi)^{-1/2} + 1/2\ Cos^2\varphi e^2 2Sen\varphi(1-e^2Sen^2\varphi)^{-3/2}]$

$= a\ [-sen\varphi(1-e^2Sen^2\varphi)^{-1/2} + Cos^2\varphi sen\varphi e^2(1-e^2Sen^2\varphi)^{-3/2}\ ]$

$= a\ sen\varphi(1-e^2sen^2\varphi)^{-3/2}\ [\ -(1-e^2Sen^2\varphi) + e^2Cos^2\varphi]$

$= aSen\varphi(1-e^2Sen^2\varphi)^{-3/2}[-1 + e^2$

$$y' = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a(1-e^2)sen\varphi}{(1-e^2sen^2\varphi)^{3/2}}$$

$y'' = d^2y/dx^2 = (1/Sen^2\ \varphi)\ d\varphi/dx$

$$y'' = -\frac{1}{sen^2\varphi} * \frac{(1-e^2sen^2\varphi)^{3/2}}{a(1-e^2)sen\varphi}$$

$$y'' = -\frac{(1-e^2sen^2\varphi)^{3/2}}{a * sen^3\varphi(1-e^2)}$$

Sustituyendo los valores de y' e y'' en la ecuación del radio de curvatura de una curva plana, tendremos:

$$\rho = \frac{(1 + (-ctg\varphi)^2)^{3/2}}{(1 - e^2 sen^2\varphi)^{3/2} / a * sen^3\varphi(1 - e^2)}$$

$$\rho = \frac{a * sen^3\varphi * (1-e^2) * (1+ctg^2\varphi)^{3/2}}{\left((1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}\right)}$$

$$\rho = \frac{a * sen^3\varphi * (1-e^2) * \left(\frac{(sen^2\varphi + \cos^2\varphi)}{sen^2\varphi}\right)^{3/2}}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{a * (1-e^2)}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}}$$

En el Ecuador:

ρ_0 =a (1-e^2) = a(1 -f)^2

En el Polo:

$\rho_{0=90}$ = a/(1-e^2)$^{1/2}$ = a/(1-f) ; por lo tanto en el polo ρ = N ;

3.2 RADIO DE CURVATURA EN EL PRIMER VERTICAL

Usaremos el teorema de MENIER, en el cual el radio de curvatura de una sección inclinada es igual al radio de curvatura de una sección normal, multiplicada por el coseno del ángulo entre las secciones.

$X = N \cos \varphi \;:\; N = X / \cos \varphi$

$$X = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{(1 - e^2 * sen^2\varphi)}}$$

$$\boxed{N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 * sen^2\varphi)}}}$$

En el Ecuador:

$N\varphi_{=0°} = a$

En el Polo:

$N\varphi_{=90°} = \dfrac{a}{\sqrt{(1 - e^2)}} = \dfrac{a}{(1 - f)}$

3.3 RADIOS DE CURVATURA ENTRE SECCIONES

3.3.1 Radio Acimutal

Si α es el azimut de una línea se puede expresar la ecuación del radio de curvatura de la manera siguiente:

$1/R\alpha = Sen^2\alpha/N + Cos^2\alpha/\rho$

$$\boxed{R\alpha = \frac{N\rho}{N \cos^2\alpha + \rho sen^2\alpha}}$$

3.3.2 Radio Medio de Gauss

El radio medio de curvatura o Radio Gaussiano, se define como la integral de Rα que varía entre 0º y 360º. Designando por Rm tal radio se tiene:

$$Rm = \frac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} R\alpha * d\alpha$$

$$Rm = \frac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho N}{(N\cos^2\alpha + \rho sen^2\alpha)} d\alpha$$

Debido a la simetría, se considera sólo la integración del primer cuadrante, y dividiendo la integral por Ncos$^2\alpha$, se tiene :

$$Rm = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{\rho N}{N\cos^2\alpha}}{(1+\frac{\rho sen^2\alpha}{N\cos^2\alpha}} d\alpha$$

Sacando fuera de la integral $\sqrt{\rho N}$, obtenemos:

$$Rm = \frac{2}{\pi}\sqrt{\rho N} * \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\frac{\rho}{N}} * \frac{1}{\cos^2\alpha}}{(1+\frac{\rho}{N}\tan g^2\alpha)} d\alpha$$

si $t = \sqrt{\frac{\rho}{N}}\tan\alpha$; $dt = \sqrt{\frac{\rho}{N}}\sec^2\alpha * d\alpha$; $dt = \sqrt{\frac{\rho}{N}} * \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$

Reemplazando en la integral y cambiando los límites de integración, se tiene:

$$Rm = \frac{2}{\pi}\sqrt{\rho N} * \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)}$$

Si $\int_0^{\infty} \frac{X^{m-1}}{1+X^n}dx = \frac{\pi}{n} * c\sec(m*\frac{\pi}{n})$

Considerando que: m=1 y n=2 tendremos

$$\int_0^{\infty} \frac{X^{m-1}}{1+X^n}dx = \frac{\pi}{n} * c\sec(m*\frac{\pi}{n}) = \frac{\pi}{2} * \frac{1}{sen(\pi/2)}$$

Sen (π/2) =sen 90° =1

$$\int_0^{\infty} \frac{X^{m-1}}{1+X^n}dx = \frac{\pi}{n} * c\sec(m*\frac{\pi}{n}) = \frac{\pi}{2} * \frac{1}{sen(\pi/2)} = \frac{\pi}{2}$$

Si $$Rm = \frac{\pi}{2} * \sqrt{\rho * N} * \frac{2}{\pi}$$

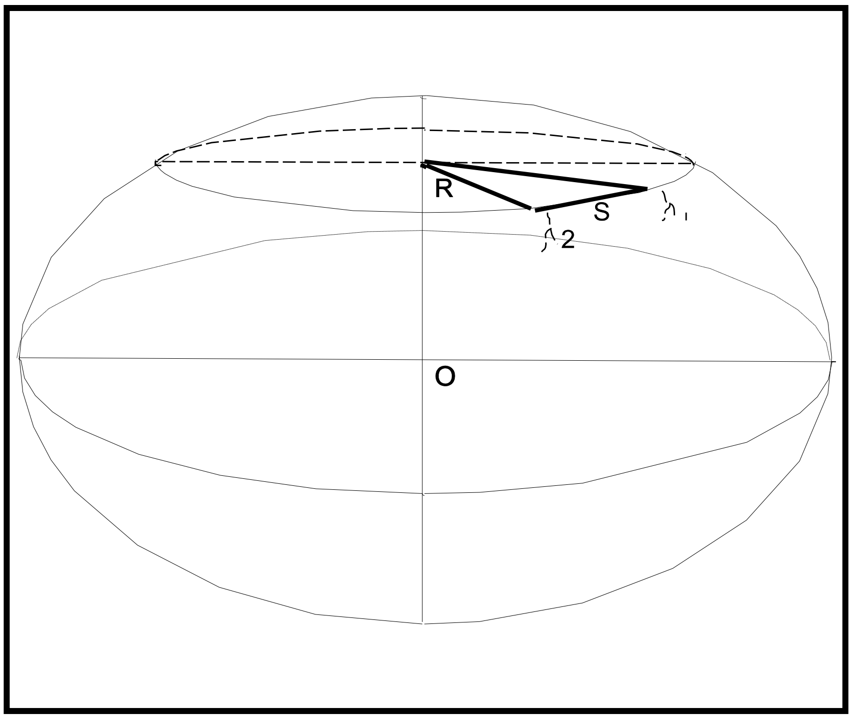
$$\boxed{Rm = \sqrt{\rho * N}}$$

IV CURVAS EN EL ELIPSOIDE

4.1 Arco de Paralelo

En el elipsoide los paralelos son círculos, siendo el circulo máximo el que corresponde al plano ecuatorial cuyo radio es "**a**". Luego un arco de paralelo corresponde a un arco de círculo, figura 7.

Figura 7



S = R $\Delta\lambda$ arc 1"

R es el radio del paralelo, corresponde a la coordenada X de la elipse

$\Delta\lambda$ la dirección de longitud ($\lambda_2 - \lambda_1$)

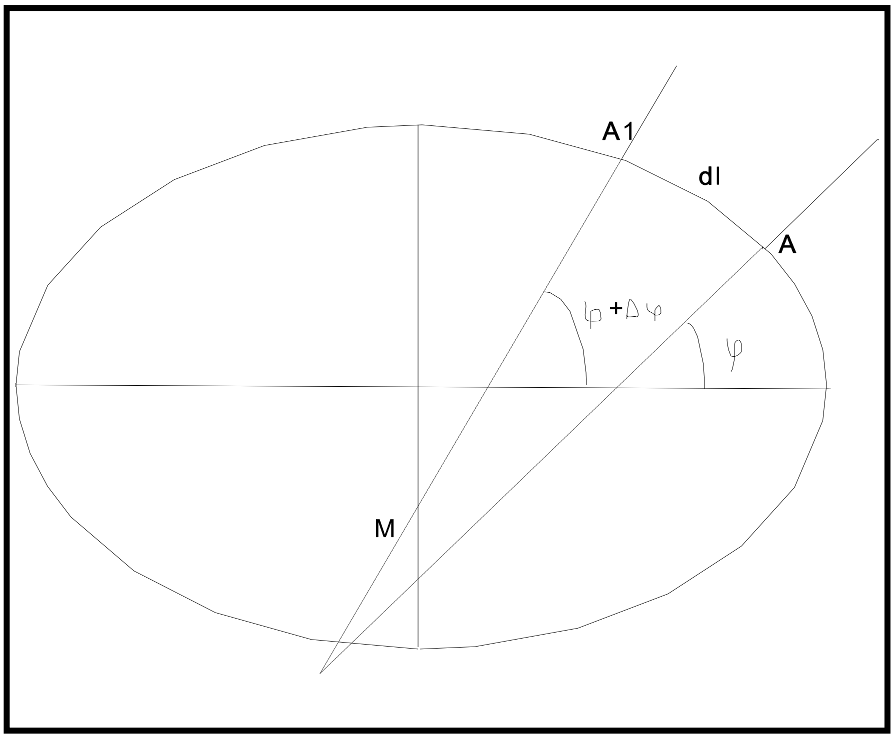
Sustituyendo R por su valor X; S = (aCosφ $\Delta\lambda$ arc 1")/((1-e^2Sen$^2\varphi$))

S = N *$\Delta\lambda$*Cos φ *arc 1"

4.2 Arco de Meridiano

En el elipsoide los meridianos corresponden a Elipses que pasan por los polos. Luego un arco de meridiano corresponderá a un arco de elipse, ver figura 8.

Figura 8



M = radio de un círculo cuyo arco es **dl**

dl = M*dφ

TEOREMA:

Hagamos que la curva C tenga las ecuaciones paramétricas x=f(t) y g(t) y supongamos que f ’ y g’ son continuas en el intervalo cerrado [a,b]. Entonces la longitud del arco L unidades de la curva C, desde el punto [f(a),g(a)] hasta el punto [f(b), g(b)] está determinado por :

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt}$$

Si $X = \dfrac{a\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{1/2}}$; y $Y = \dfrac{a(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{1/2}}$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a(1-e^2)sen\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}} \ ; \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{-a(1-e^2)sen\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}}\right)^2} * d\varphi$$

$$dL = \sqrt{\frac{a^2(1-e^2)^2 sen^2\varphi + a^2(1-e^2)\cos^2\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^3}} * d\varphi$$

$$dL = \sqrt{\frac{a^2(1-e^2)(sen^2\varphi + \cos^2\varphi)}{(1-e^2 sen^2\varphi)^3}} * d\varphi$$

$$dL = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}} * d\varphi$$

$$\boxed{L = \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}} * d\varphi}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^{-n} &= 1-nx+\frac{n(n+1)x^2}{2!}-\frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!}+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)x^4}{4!}-\\ &\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)x^5}{5!}+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)x^6}{6!}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^{-n} &= 1-nx+\frac{n(n+1)x^2}{2!}-\frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!}+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)x^4}{4!}-\\ &\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)x^5}{5!}+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)x^6}{6!}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}}$$

$$L = a(1-e^2)*\int_{\varphi 1}^{\varphi 2}(1-e^2 sen^2\varphi)^{-3/2}\,d\varphi$$

$(1 + X)^{-n}$; binomio de Newton cuando $X^2 < 1$

$$sen^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$

$$sen^4\varphi = \frac{1}{8}(3-4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$$

$$sen^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi - \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$

$$sen^8\varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2\varphi + \frac{7}{32}\cos 4\varphi - \frac{1}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi$$

$$sen^{10}\varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256}\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi - \frac{45}{512}\cos 6\varphi + \frac{5}{256}\cos 8\varphi - \frac{1}{512}\cos 10\varphi$$

$$sen^{12}\varphi = \frac{231}{1024} - \frac{99}{256}\cos 2\varphi + \frac{495}{2048}\cos 4\varphi - \frac{55}{512}\cos 6\varphi + \frac{33}{1024}\cos 8\varphi - \frac{3}{512}\cos 10\varphi + \frac{1}{2048}\cos 12\varphi$$

$$(1+(-e^2sen^2\varphi))^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}(-e^2sen^2\varphi) + \frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}e^4sen^4\varphi}{1*2} - \frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}*\frac{7}{2}e^6sen^6\varphi}{1*2*3} +$$

$$\frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}*\frac{7}{2}*\frac{9}{2}e^8sen^8\varphi}{1*2*3*4} - \frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}*\frac{7}{2}*\frac{9}{2}*\frac{11}{2}e^{10}sen^{10}}{5!} + \frac{\frac{3}{2}*\frac{5}{2}*\frac{7}{2}*\frac{9}{2}*\frac{11}{2}*\frac{13}{2}e^{12}sen^{12}}{6!} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1+(-e^2sen^2\varphi))^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}e^2sen^2\varphi + \frac{15}{18}e^4sen^4\varphi + \frac{35}{16}e^6sen^6\varphi + \frac{315}{128}e^8sen^8\varphi + \frac{693}{256}e^{10}sen^{10}\varphi + \frac{3003}{1024}e^{12}sen^{12}\varphi + \ldots\ldots$$

$$\boxed{L = a(1-e^2)*\int_{\varphi 1}^{\varphi 2}\left(1 + \frac{3}{2}\mathrm{e}^2\mathrm{sen}^2\varphi + \frac{15}{18}\mathrm{e}^4\mathrm{sen}^4\varphi + \frac{35}{16}\mathrm{e}^6\mathrm{sen}^6\varphi + \frac{315}{128}\mathrm{e}^8\mathrm{sen}^8\varphi + \frac{693}{256}\mathrm{e}^{10}\mathrm{sen}^{10}\varphi + \frac{3003}{1024}\mathrm{e}^{12}\mathrm{sen}^{12}\varphi + ..\right)d\varphi}$$

Considerando el seno de la latitud a la potencia de 10 tendremos:

$$L = a(1-e^2)\left[\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} d\varphi + \frac{3}{2}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^2 sen^2\varphi * d\varphi + \frac{15}{18}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^4 sen^4\varphi * d\varphi + \frac{35}{16}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^6 sen^6\varphi * d\varphi + \frac{315}{128}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^8 sen^8\varphi * d\varphi + \frac{693}{256}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} e^{10} sen^{10}\varphi * d\varphi\right]$$

Reemplazando en las integrales el valor de las series de potencias de seno tendremos como resultado final lo siguiente:

$L=\alpha*\varphi - \beta*sen2\varphi + \gamma*sen4\varphi - \delta*sen6\varphi + \varepsilon*sen8\varphi - \xi*sen10\varphi +$............

$\alpha=A*a(1-e^2)/(180/\pi)$;$\beta=B*a(1-e^2)/2$

$\gamma=C*a(1-e^2)/4$; $\delta=D*a(1-e^2)/6$

$\varepsilon=E*a(1-e^2)/8$; $\xi=F*a(1-e^2)/10$

Donde las constantes A a F tienen la siguiente expresión:

$A = 1+(3/4)e^2+(45/64)e^4 + (175/256)e^6 +(11025/16384) e^8 +(43659/65336)e^{10}$

$B = (3/4)e^2+(15/16)e^4+(525/512)e^6+(2205/2048)e^8 + (72765/65536)e^{10}$

$C = (15/64)e^4+(105/256)e^6+(2205/4096)e^8 + (10395/16384)e^{10}$

$D = (35/512)e^6 +(315/2048)e^8 + (31185/131072)e^{10}$

$E = (315/16384)e^8 + (3465/65536)e^{10}$

$F = (693/131072) e^{10}$

4.3 Ejercicio: Cálculo de arco de Meridiano para diferentes Elipsoides.

1. **Elipsoide Internacional 1924**:

$M = 111.136{,}536656\ \varphi - 16.107{,}03467 \sin 2\varphi + 16{,}97621083 \sin 4\varphi - 0{,}022265934 \sin 6\varphi + 3{,}167414495\ E\text{-}05 \sin 8\varphi - 4{,}599533\ E\text{-}08 \sin 10\varphi$

2. **Elipsoide SAD-69**:

$M = 111.133{,}3488 * \phi - 16.038{,}95495 * \sin 2\phi + 16{,}83348992 * \sin 4\phi - 0{,}02198605236 * \sin 6\phi + 3{,}114475\ E\text{-}05 * \sin 8\phi - 4{,}504\ E\text{-}08 * \sin 10\phi$

3. **Elipsoide WGS-84**

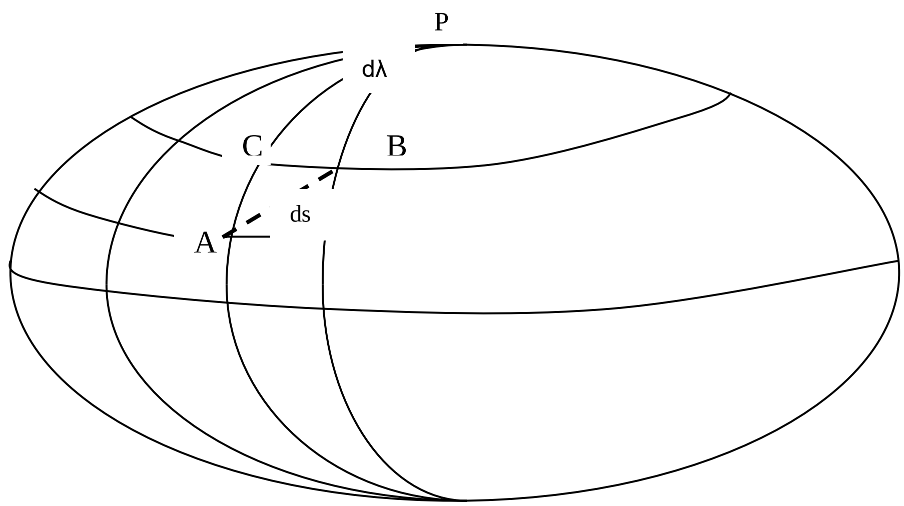
$M = 111.133{,}032 * \phi - 16.038{,}5214 * \sin 2\phi + 16{,}83262786 * \sin 4\phi - 0{,}02198439482 * \sin 6\phi + 3{,}114165\ E\text{-}05 * \sin 8\phi - 4{,}503\ E\text{-}08 * \sin 10\phi$

4.4 La línea Geodésica

Es la curva más corta entre dos puntos sobre la superficie del elipsoide, se puede definir también como: "la línea geodésica sobre una superficie, es la curva en la que cada uno de sus puntos, el plano de contacto pasa a través de la normal a la superficie en este mismo punto (P.S. Zakatov, pag.63). Se puede decir de esta línea, que la geodésica en una superficie dada, es la curva en la que la normal principal de cada uno de sus puntos coincide con la normal de la superficie.

Ecuación Fundamental de la Línea Geodésica

Figura 9



- $ds * \cos \alpha = M * d\phi$
- $ds * \operatorname{sen} \alpha = N * \cos \phi * d\lambda$
- $d\alpha = d\lambda * \operatorname{sen} \phi$

α es el ángulo acimutal CAB

ϕ es la latitud del arco CB

ds es el diferencial de distancia geodésica de A a B

dλ es la diferencia de longitud entre C y B

Figura 10

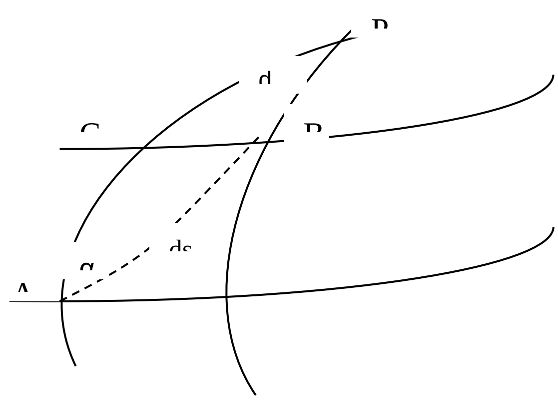
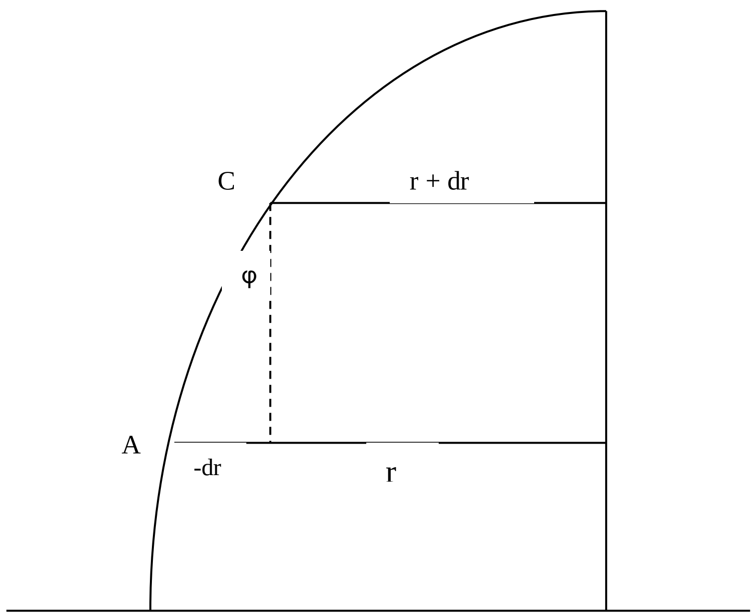


Figura 11



- r es el radio del paralelo
- dr variación en el radio r debido a la latitud

dr = - M* d ϕ* sen ϕ

r = N cos ϕ

a) cos α= M*d ϕ/ ds
b) sen α = N* cos ϕ * dλ/ ds

Multiplicando **a** por r*d α y **b** por dr, se tiene que:

cos α * r*d α = M* r* d ϕ/ds * d α

sen α * dr = N* cos ϕ * dλ/ ds * dr

Sumando ambas expresiones, se tiene:

cos α * r*d α + sen α * dr = M* r* d ϕ/ds * d α + r * dλ/ ds * dr

cos α * r*d α + sen α * dr = M* r* d ϕ/ds * d α – M *r * dλ/ ds * d ϕ* sen ϕ

cos α * r*d α + sen α * dr = M* r* d ϕ/ds * dλ*sen ϕ - M *r * dλ/ ds * d ϕ* sen ϕ

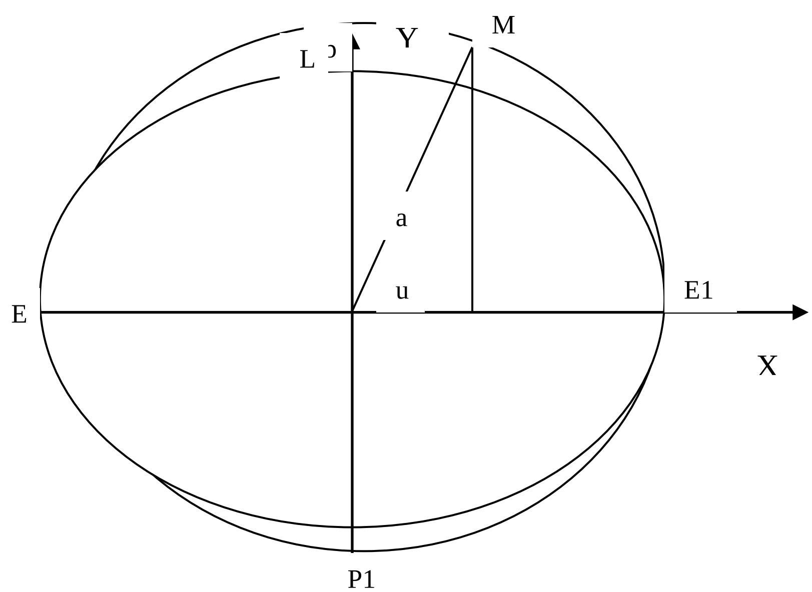
cos α * r*d α + sen α * dr = 0

Integrando, se tiene:

r * sen α + r * sen α = 0 , por lo tanto

r * sen α = 0

Figura 12



La elipse meridiana definida por EPE1P1, y el arco de circunferencia LME1. La latitud reducida es **u** y el radio **a.**

De acuerdo con la latitud reducida, figura 12, se tiene que: r = a cos u, por lo tanto, la ecuación queda como:

$A^* \cos u * \text{sen}\ \alpha = c$ (constante), entonces:

$\text{Cos}\ u_1 * \text{sen}\ \alpha_1 = \text{Cos}\ u_2 * \text{sen}\ \alpha_2 = \text{Cos}\ u_3 * \text{sen}\ \alpha_3 =. \text{Cos}\ u_4 * \text{sen}\ \alpha_4 = ... =$ constante

De esta ecuación se desprende que para una línea geodésica sobre la superficie del elipsoide de revolución, el producto del coseno de la latitud reducida por el seno del acimut de la línea en este punto, es una constante (P.S. Zakatov, Pág. 71).

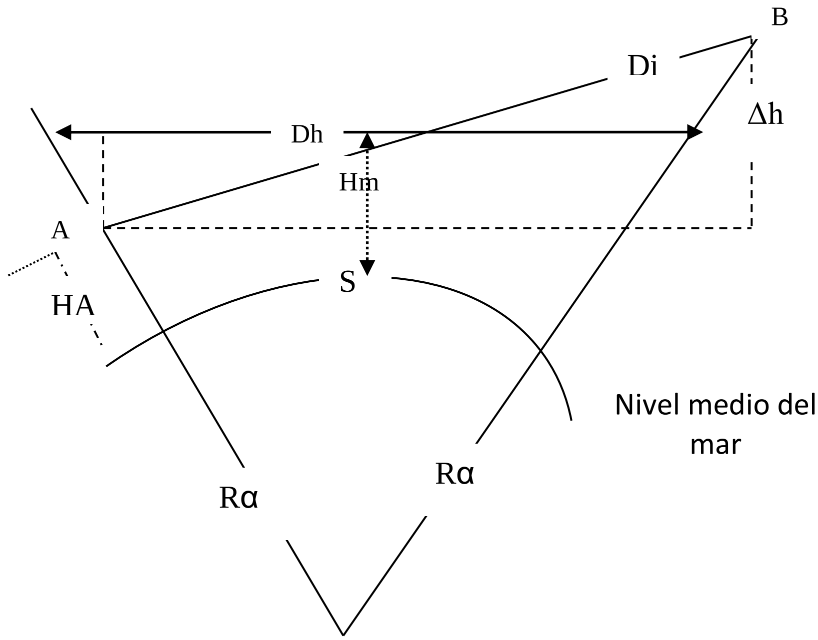
4.5 Reducción de una línea inclinada a distancia geodésica

Para la realización de cálculos que permitan obtener posiciones geodésicas es necesario contar con la distancia geodésica. Para obtener esta distancia a partir de una distancia inclinada medida en terreno es necesario considerar las siguientes reducciones:

- Reducción de la distancia inclinada a distancia horizontal en la respectiva sección.
- Reducción de la distancia horizontal en su respectiva sección a distancia al nivel medio del mar.
- Reducción de la distancia al nivel medio del mar a arco geoidal (S).

4.5.1 Reducción de la distancia inclinada a distancia horizontal

Figura 13



$$dh = \sqrt{\left(\mathrm{Di}^2 - \Delta\mathrm{h}^2\right)} \Rightarrow dh = \left(\mathrm{Di}^2 - \Delta\mathrm{h}^2\right)^{0,5} \Rightarrow dh = Di * (1 - \frac{\Delta h^2}{Di^2})^{0,5}$$

Por medio de la serie $(1+x)^{0,5} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} * \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{3}{6}x^3 - ......$

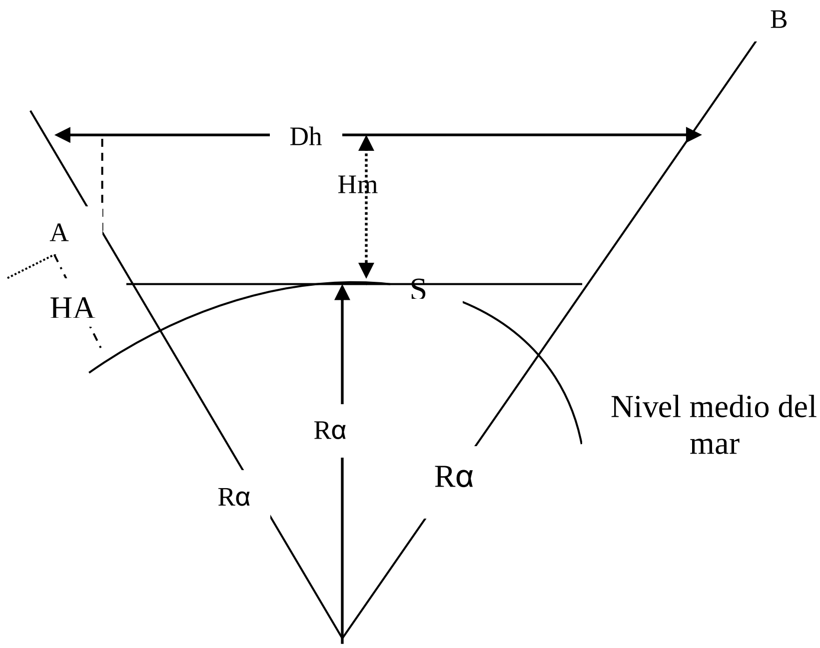
$$dh = Di * \left[1 + \frac{1}{2}(-\frac{\Delta h^2}{Di^2}) - \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \left(-\frac{\Delta h^2}{Di^2}\right)^2 + ...\right]$$

$$dh = Di * \left[1 - \frac{1}{2} * \frac{\Delta h^2}{Di^2} + \frac{1}{8}\frac{\Delta h^4}{Di^4}\right] \Rightarrow dh = Di - \frac{1}{2} * \frac{\Delta h^2}{Di}$$

$$dh = Di - \frac{1}{2} * \frac{\Delta h^2}{Di}$$

$$Ch = -\frac{1}{2} * \frac{\Delta h^2}{Di}$$; Corrección de altura

4.5.2 Reducción de la distancia horizontal al Nivel medio del Mar



$$hm = \frac{Ha + Hb}{2}$$

$$\frac{dh}{(hm + R\alpha)} = \frac{Dnmm}{R\alpha}$$

Dnmm = Distancia al nivel medio del mar

Rα= radio acimutal de la línea que forma la sección.

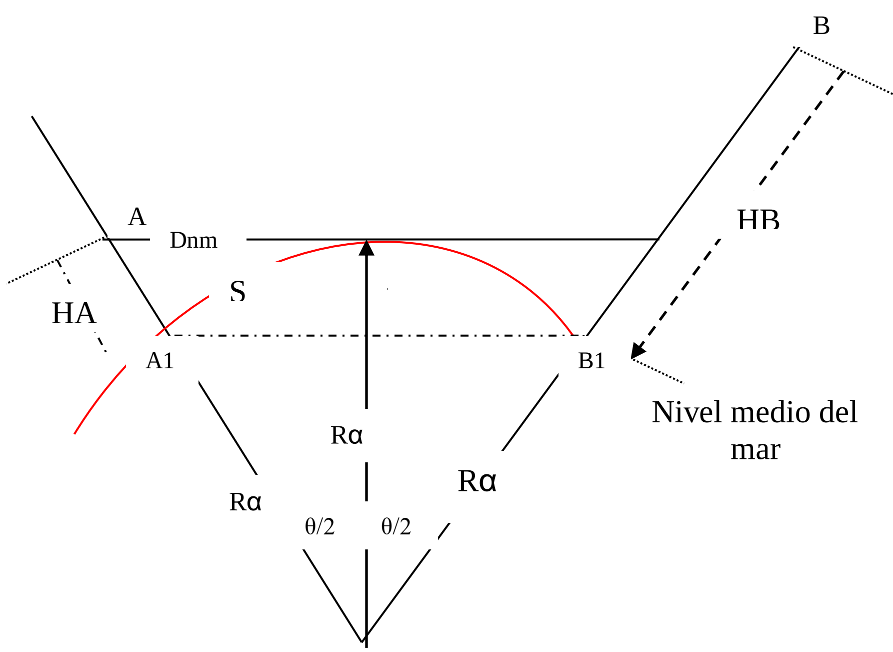
$$Dnmm = \frac{dh * R\alpha}{(hm + R\alpha)} \Rightarrow Dnmm = \frac{R\alpha * dh}{R\alpha * \left(1 + \frac{hm}{R\alpha}\right)} \Rightarrow Dnmm = dh * \left(1 + \frac{hm}{R\alpha}\right)^{-1}$$

Desarrollando la serie $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\ldots\ldots$

$$Dnmm = dh * \left[1 - \frac{hm}{R\alpha} + \frac{hm^2}{R\alpha^2} - \frac{hm^3}{R\alpha^3} + \ldots..\right]$$

$$Dnmm = dh - dh * \frac{hm}{R\alpha}$$

4.5.3 Reducción de la distancia al NMM a Geodésica (S)



$$arcoA1B1 = R\alpha * \theta$$

$$sen\frac{\theta}{2} = \frac{Dnmm}{2 * R\alpha} \Rightarrow R\alpha * sen\frac{\theta}{2} = \frac{Dnmm}{2} \Rightarrow 2 * R\alpha * sen\frac{\theta}{2} = Dnmm$$

Desarrollando la serie del sen de un ángulo: $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$

Y utilizando los dos primeros términos de la serie, se tiene:

$$sen\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{48}$$

$$Dnmm = 2 * R\alpha * sen\frac{\theta}{2} = R\alpha * \theta - R\alpha * \frac{\theta^3}{24}$$

$$\theta = \frac{S}{R\alpha}$$

$$Dnmm = R\alpha * \frac{S}{R\alpha} - R\alpha * \frac{\left(\frac{S}{R\alpha}\right)^3}{24}$$

$$Dnmm = S - \frac{S^3}{24 * R\alpha^2}$$

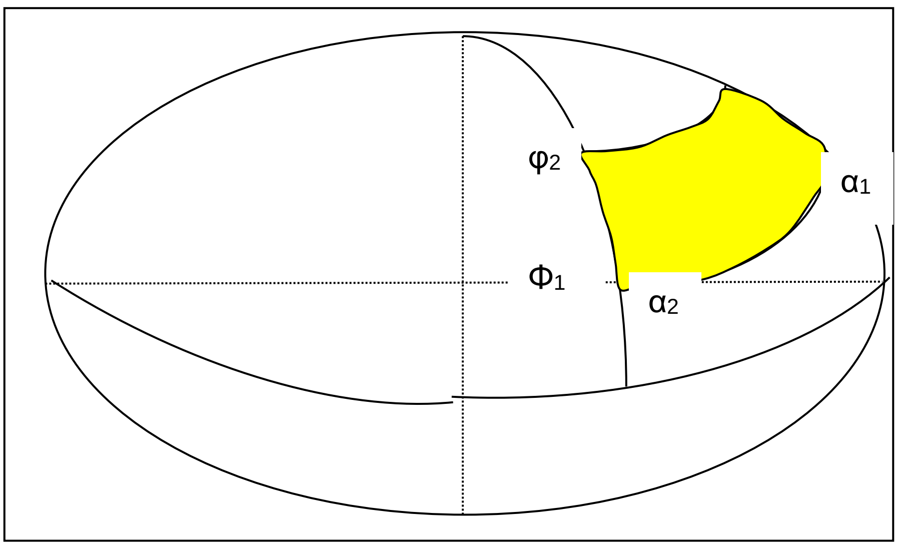
La distancia geodésica reducida desde una distancia inclinada medida en terreno queda determinada por la expresión siguiente:

$$S = Dnmm + \frac{S^3}{24 * R\alpha^2}$$

V.- CÁLCULO DE SUPERFICIE EN EL ELIPSOIDE

Si se desea calcular el área de una figura en el elipsoide, limitada por meridianos y paralelos conocidos, es necesario conocer primero la figura diferencial que ella forma y luego deducir su valor analítico, figura 13

Figura 13



La figura diferencial formada por $\lambda 1 \lambda 2 \varphi 1 \varphi 2$, nos muestra que :

$\varphi 1 \varphi 2$=> arco de meridiano

$\lambda 1 \lambda 2$=> arco de paralelo

de las definiciones analíticas para la determinación de un arco de paralelo como para encontrar el valor de un arco de meridiano, tendremos que:

Arco de paralelo = $N\cos\varphi \, d\lambda$

Arco de meridiano =$\rho \, d\varphi$,

de las definiciones anteriores tendremos entonces que la superficie de la figura sobre el elipsoide formada por el perímetro $\varphi 1, \varphi 2, \lambda 1, \lambda 2$ queda determinada por :

Superficie(S) = = $N\cos\varphi d\lambda * \rho d\varphi$

$N*\rho = a^2(1 - e^2)/(1- e^2sen^2\varphi)^2 = b^2/(1 - e^2sen^2\varphi)^2$

$$S = b^2 \int_{\varphi 1}^{\varphi 2}\int_{\lambda 1}^{\lambda 2} \frac{\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2)} d\varphi * d\lambda$$

Integrando respecto a λ se tendrá:

$$S = b^2 \Delta\lambda \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \frac{\cos\varphi}{(1-e^2 sen^2\varphi)^2} d\varphi$$

Desarrollando al interior de la integral el valor de ($1- e^2sen^2\varphi)^{-2}$, por medio de la serie $(1+x)^{-2} = 1 -2x + 3x^2 -4x^3 + 5x^4- 6x^5$ +.......; se tiene:

$S = b^2 \Delta\lambda \cos\varphi [1 + 2 e^2sen^2\varphi + 3e^4sen^4\varphi + 4e^6sen^6\varphi+ ....]d\varphi$,

$$S = b^2 \Delta\lambda \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} (\cos\varphi * 2e^2 sen^2\varphi\cos\varphi + 3e^4 sen^4 \cos\varphi + 4e^6 sen^6 \cos\varphi + ...) d\varphi$$

La superficie de una figura en el elipsoide queda entonces definida al resolver esta integral:

$S = b^2 \Delta\lambda[(sen\varphi_2 - sen\varphi_1) + (2/3) e^2 (sen^3\varphi_2-sen^3\varphi_1) +(3/5)e^4(sen^5\varphi_2-sen^5\varphi_1) + (4/7) e^6(sen^7\varphi_2-sen^7\varphi_1) + ...]$

Si deseamos calcular la superficie de la mitad del elipsoide, entonces definiremos que:

$\varphi 1 = 0º$, $\varphi 2 = 90º$; $\lambda 1 = 0º$, $\lambda 2 = 360º = 2\pi$

$$S = 2\, b^2\, \pi[1 + (2/3)e^2 + (3/5)\, e^4 + (4/7)\, e^6 + (5/9)\, e^8 + (6/11)\, e^{10} + ...]$$

La superficie total del elipsoide será la siguiente:

$$S = 4\, b^2 \pi[1 + (2/3)e^2 + (3/5)\, e^4 + (4/7)\, e^6 + (5/9)\, e^8 + (6/11)\, e^{10} + ...]$$

EJERCICIOS

1.- Calcular los radios de curvatura de un punto P que se encuentra a una latitud de -30° 30’ 15”, en función de los parámetros del elipsoide Internacional de 1924.

a= 6378388; f = 1/297 ; e^2 = 0,00672267002

1.1 Radio de curvatura del meridiano en el punto

$$\boxed{\rho = \frac{a*(1-e^2)}{(1-e^2 sen^2\varphi)^{3/2}} = 6.352.005{,}04m.}$$

1.2 Radio de curvatura principal o Gran Normal

$$\boxed{N = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2 * sen^2\varphi)}} = 6.383.919{,}365m.}$$

1.3 Radio Medio de Gauss

$$\boxed{\mathrm{Rm} = \sqrt{\rho * \mathrm{N}} = 6.367.942{,}209\mathrm{m.}}$$

2.- Calcular las coordenadas cartesianas del punto A, cuya latitud es -33° 18’ 20,5”, en relación a los parámetros del elipsoide Internacional de 1924.

a= 6378388 ; f=1/297; e^2 = 0,00672267002

Y = a(1-e) Senφ/(1-e Senφ)$^{1/2}$

X = a Cos φ / (1- e^2 sen^2 φ)$^{1/2}$

X = 5.336.166,528 m.

Y = 3.482.396,03 m.

3.- Calcular las Coordenadas cartesianas del punto anterior (A), en relación a los parámetros del elipsoide Sudamericano de 1969.

a= 6378160 ; f= 1/298,25 ; e^2 = 0,00669454185

Y = a(1-e) Senφ/(1-e Senφ)$^{1/2}$

X = a Cos φ / (1- e^2 sen^2 φ)$^{1/2}$

X= 5.335.953,11 m.

Y = 3.482.355,365 m.

4.- Calcular el radio acimutal de la línea AB cuyos datos son:

Acimut (desde el Sur) de A a B = 235° 32’ 18,53”

Latitud de A = -35° 18’ 37”,42

Elipsoide de referencia : WGS-84:

-a= 6378137; f= 1/298,25722; e^2 = 0,00669438051

N = 6.385.281,432 m.

P = 6.356.752, 993 m.

$$\boxed{R\alpha = \frac{N\rho}{N\cos^2\alpha + \rho sen^2\alpha} = 6.376.119{,}105m.}$$

5.- Calcular la distancia geodésica entre las estaciones Alfa y Beta

Datos:

Sistema Geodésico: Psad-56

Elipsoide de Referencia: Internacional 1924 (Hayford)

* a= 6.378.388 * f= 1/297

Estación: Alfa

Ha= 4686,19 m.

hia=1,40 m.

Estación: Beta

Hb= 4230,83 m.

hib= 1,45 m.

Distancia Inclinada = 21916,98 m.

Acimut de la línea= 325° 37’ 43”

Latitud media = -31° 40’ 20”

Desarrollo:

1.- Reducción de la distancia inclinada a Horizontal

$$\begin{array}{r} 4686{,}19 \\ +\quad 1{,}40 \\ \hline 4687{,}59 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4230{,}83 \\ +\quad 1{,}45 \\ \hline 4232{,}28 \end{array}$$

Δh= 455,31

$$dh = \sqrt{\left(Di^2 - \Delta h^2\right)} \Rightarrow dh = 21.912{,}25m.$$

2.- Reducción de la distancia horizontal al Nivel Medio del Mar

$$hm = \frac{4686{,}19 + 4230{,}83}{2} \Rightarrow hm = 4458{,}51m.$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 * sen^2\varphi)^{0,5}} \Rightarrow N = 6.384.078{,}72m.$$

$$\rho = \frac{a*(1-e^2)}{(1 - e^2 * sen^2\varphi)^{1,5}} \Rightarrow \rho = 6.352.934{,}90m.$$

$$R\alpha = \frac{N * \rho}{N * \cos^2\alpha + \rho * sen^2\alpha} \Rightarrow R\alpha = 6.362.828{,}085m.$$

$$Dnmm = dh - dh * \frac{hm}{R\alpha} \Rightarrow Dnmm = 21.896{,}91m.$$

3.- Reducción de la distancia al nivel medio del mar a Geodesica (S)

$$S = Dnmm + \frac{S^3}{24 * R\alpha^2}$$

Como no se tiene la distancia geodésica se utiliza en un primer calculo la distancia reducida al nivel medio del mar.

$$S = Dnmm + \frac{Dnmm^3}{24 * R\alpha^2} \Rightarrow S = 21.896{,}91 + 0{,}0108m \quad \therefore S = 21.896{,}921m$$

$\mathrm{Re}\,calculando:$

$$S = Dnmm + \frac{(21896{,}921)^3}{24 * R\alpha^2} \Rightarrow S = 21.896{,}91m. + 0{,}0108$$

S= 21.896,921 metros

COORDENADAS GEODESICAS

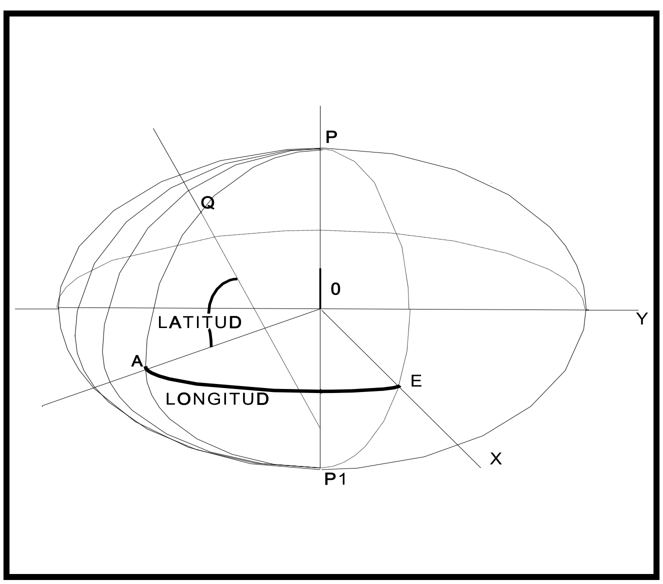
Consideremos el Elipsoide cuyo centro está en 0. El eje 0z es el eje rotacional, el eje 0x se encuentra en el plano ecuatorial e intercepta al meridiano PEP1 que se define como el meridiano principal, desde el cual se toman las longitudes. El eje OY se encuentra en el plano ecuatorial.

LONGITUD:

La longitud geodésica de un punto se define como el ángulo diedro entre los planos del meridiano primario y un meridiano cualquiera, en la figura 11 la longitud queda definida por el ángulo comprendido por EOA, considerando que el meridiano PE es el meridiano origen de las coordenadas. Desde este meridiano origen las longitudes son negativas si el ángulo se extiende al oeste de este meridiano cero, caso contrario si el ángulo se extiende al este del meridiano origen.

LATITUD:

La latitud geodésica de un punto ubicado sobre la superficie del elipsoide, se define como el ángulo entre la normal al elipsoide en el punto y el plano ecuatorial. En la figura 3, la Latitud queda definida por el ángulo comprendido por QOA . El plano ecuatorial es el origen de las latitudes, en el hemisferio norte las latitudes se consideraran positivas al aumentar la graduación desde el plano ecuatorial hacia el polo norte. En el hemisferio sur, las latitudes serán negativas, considerándose desde el Plano ecuatorial hacia el polo sur.



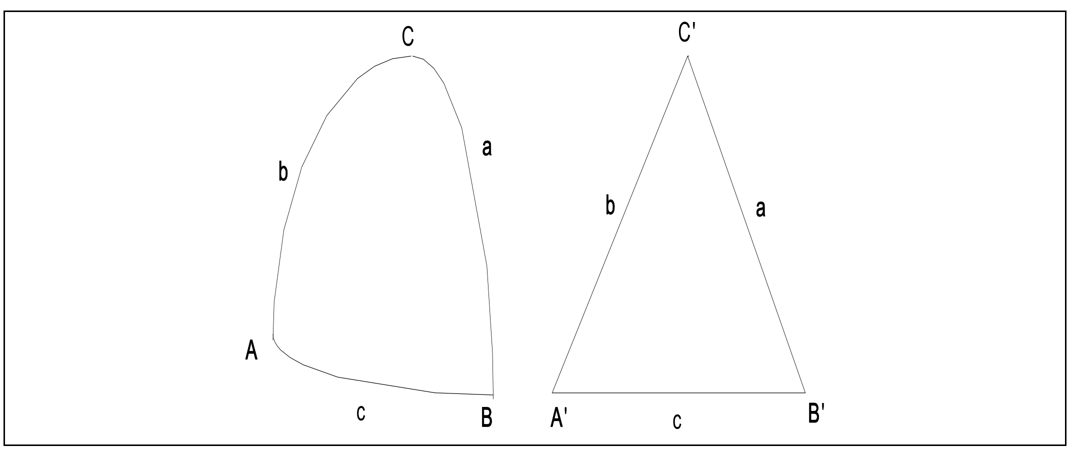
EXCESO ESFERICO

El exceso esférico en un triángulo se define como la diferencia angular existente entre la suma de los tres ángulos de un triángulo menos 180º, esta diferencia se produce debido a la esfericidad de la tierra, situación que provoca que en un triángulo sobre ella la suma de sus tres ángulos excedan en una cierta cantidad a los 180º que es la suma de los ángulos internos en un triángulo plano.

La solución de los triángulos esféricos se hace más fácil si se adopta el teorema de LEGENDRE que expresa lo siguiente:

" *Si los lados de un triángulo plano y rectilíneo son iguales a los lados correspondientes de un triángulo esférico, luego los ángulos del triángulo plano serán iguales a los ángulos correspondientes del triángulo esférico menos un tercio del* ***exceso esférico*** ".

Si consideramos un triángulo esférico, en una esfera de radio R, y al triángulo plano correspondiente, como se señala en las figuras:



Se utilizarán estos triángulos para encontrar la diferencia que existe entre el ángulo en una esfera y el ángulo en un plano, en este caso será la diferencia existente entre: A-A' , B-B' , C-C' :

Primero aplicaremos la ley del coseno al triángulo esférico:
coseno(a/R) = coseno(b/R) coseno(c/R) - seno(b/R) seno(c/R)coseno(A)
despejando nos queda:

$$\text{coseno } A = \frac{\cos (a/R) - \cos (b/R)\cos(c/R)}{\text{sen } (b/R)\ \text{sen}(c/R)}$$

Los ángulos a/R , b/R , c/R , son ángulos pequeños por lo tanto podremos utilizar el desarrollo en serie para encontrar sus valores, se utilizarán las series de seno y coseno, por fines prácticos del desarrollo y además por encontrar una precisión suficiente se utilizarán solamente hasta la cuarta potencia, dejando de lado todas las potencias que sean mayores de la cuarta, luego podremos escribir el desarrollo en serie la expresión anterior como sigue:

$$\text{coseno } A = \frac{(1- a^2/2R^2 + a^4/24R^4) - (1- b^2/2R^2 +b^4/24R^4)(1- c^2/2R^2 + c^4/24R^4)}{(b/R - b^3/6R^3)\ (c/R - c^3/6R^3)}$$

Desarrollando los paréntesis se obtiene:

$$\text{Coseno } A = \left[\frac{(b^2 +c^2 -a^2)}{2\ bc} + \frac{(a^4 - b^4 - c^4 - 6\ b^2\ c^2)}{24\ R^2\ bc} \right] [1 - (c^2+ b^2)/6R^2]^{-1}$$

Desarrollando en serie la expresión: $[1 - (c^2 + b^2)/6R^2]^{-1}$, y considerando solamente los dos primeros términos de ella , se tiene finalmente que :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2}{24\,R^2\,bc}$$

En un triángulo plano se tiene que :

$$\text{coseno } A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$\text{seno}^2 A' = 1 - \text{coseno}^2 A'$$

$$\text{sen}^2 A' = 1 - \text{coseno}^2 A' = 1 - \frac{a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2b^2a^2 - 2c^2a^2}{4\,b^2\,c^2}$$

$$\text{seno}^2 A' = - \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2b^2\,c^2 - 2c^2a^2}{4\,b^2c^2}$$

$$(bc\ \text{seno}^2 A'/6R^2) = \frac{a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2b^2a^2 - 2c^2a^2}{24\,R\,bc}$$

Reemplazando: coseno A = coseno A’ - (bc seno^2 A’/6R^2)

cos A - cos A’ = - bc sen^2 A’ / 6R^2 = exceso esférico que afecta al ángulo A, como se puede apreciar este es el valor de un tercio de la superficie del triángulo dividido por R^2, esto nos viene a demostrar el Teorema de Legendre

VI. BIBLIOGRAFÍA

Jordan-Eggert, “Jordan´s Handbook of Geodesy”, Volumen III, second Half, English Translation Coorp of Engineers, U.S. Army, Army Map Service, Waashington 25,D.C., 1962.

Morales, Mari Ruiz. “ Manual de Geodesia y Topografía”, Ediciones Proyecto Sur. 2° edición 1998. España

Rapp. Richard H., “Geodesia Geométrica”, volumen I. Departamento de Ciencias Geodésicas Universidad Estatal de Ohio. 1980

Zakatov, P.S. “Curso de Geodesia Superior”, Editorial MIR, traducción al español, 1981