TRANSFORMACIÓN DE SISTEMAS GEODÉSICOS POR EL MÉTODO DE CUATRO PARÁMETROS

La transformación de sistemas geodésicos mediante parámetros permite utilizar tanto los sistemas geodésicos disponibles como sus cartografías, lo que representa una notable ventaja para los trabajos tanto topográficos como geodésicos que se requieran para las diferentes disciplinas relativas al ámbito de las mediciones.

La obtención de parámetros que permitan pasar de un sistema geodésico a otro requiere la necesidad de contar con puntos con coordenadas comunes, que se encuentre bien distribuidos en la zona a definir, es importante considerar la calidad de las coordenadas de los puntos a confrontar en el respectivo cálculo. Es necesario tener presente que el resultado ha obtener va a ser consecuencia de la calidad de las posiciones de los respectivos vértices a comparar, el proceso matemático no va a mejorar las condiciones iniciales de las coordenadas utilizadas, en consecuencia, los valores obtenidos de los parámetros de transformación deberán ser solidarios con los valores iniciales considerados en el proceso de transformación.

La cantidad de puntos a considerar en el proceso es importante al igual que su distribución, una mala distribución de puntos debería entregar valores que reflejen solamente la distribución inicial y consecuentemente el nivel de confiablidad estará determinado por el área que los puntos cubran. Los parámetros de transformación obtenidos tienen validez dentro del área que comprenden los vértices que entran en el cálculo de los parámetros, los valores fuera de esta área dejan de tener un nivel de confianza que permita utilizarlos.

El presente trabajo está orientado a presentar un proceso de transformación de sistemas geodésicos que utilicen cuatro parámetros, considerando para el cálculo las coordenadas planas que tengan los puntos a considerar en el cálculo. Este procedimiento permite sustraerse de la necesidad de contar con las alturas, las cuales para homogenizarlas podrían necesitar contar para alguno de los sistemas de ondulaciones geoidales (N).

El cálculo de cuatro parámetros requiere encontrar dos traslaciones, una rotación y un factor de escala entre los sistemas geodésicos. El fundamento matemático de este proceso de se encuentra en la Geometría analítica, la que proporciona la base de este cálculo[1,2]

Traslaciones[1]: Llamaremos traslación a la transformación que consiste en desplazar todos los puntos de una figura según una misma distancia y en el mismo sentido.

Las ecuaciones de una traslación cuyas proyecciones sobre los ejes son, respectivamente, h y k, tienen por expresión

$$x' = x + h$$

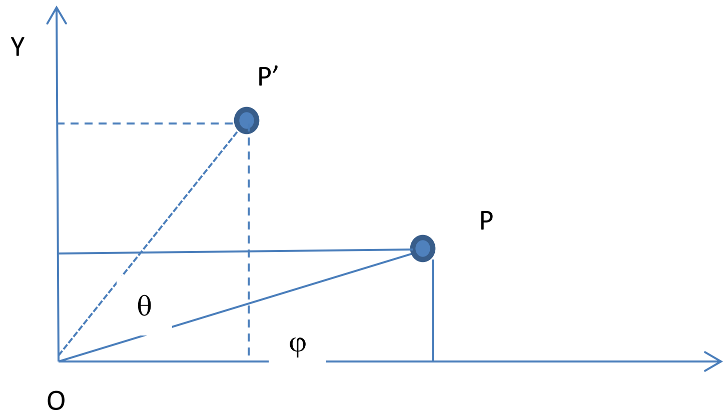
$$y' = y + k$$

Rotaciones[1]: Se denomina rotación a una transformación que consiste en hacer girar todos los puntos en un mismo ángulo alrededor de un punto dado O. Este punto se conoce como centro de rotación.

Las ecuaciones de una rotación en un ángulo φ alrededor del origen son

$$x' = x \text{ coseno } \varphi - y \text{ seno } \varphi$$

$$y' = x \text{ seno } \varphi + y \text{ coseno } \varphi$$



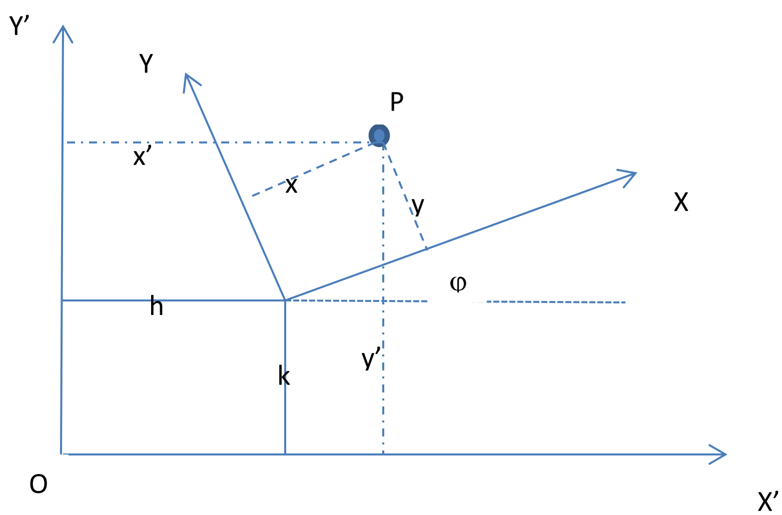
OP = OP'

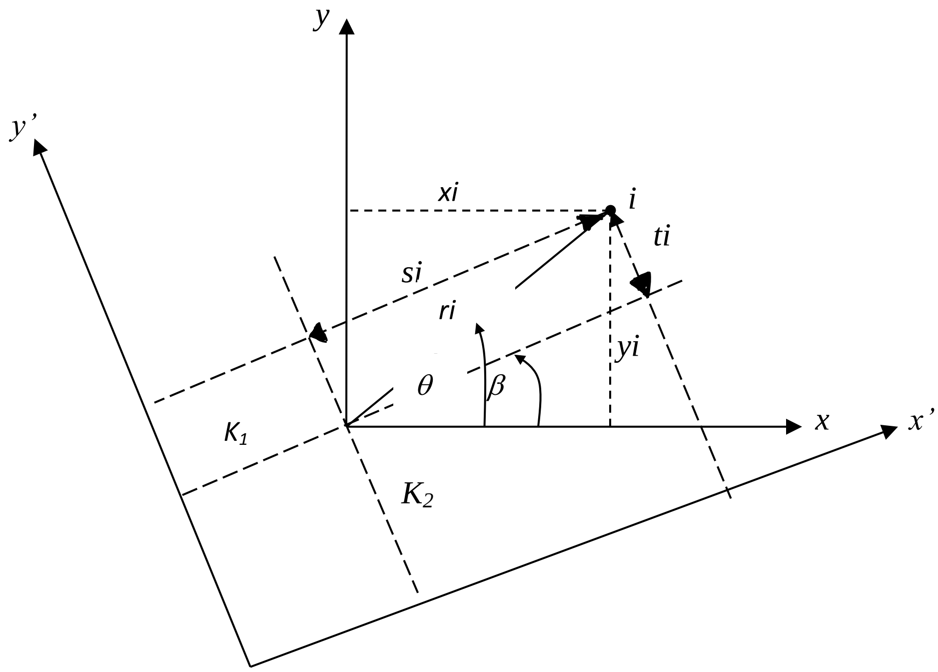
Desplazamiento[1]: Un desplazamiento es equivalente a una traslación o a una rotación seguida de una traslación.

Las ecuaciones de un desplazamiento son de la forma

$$x' = x \text{ coseno } \varphi - y \text{ seno } \varphi + h$$

$$y' = x \text{ seno } \varphi + y \text{ coseno } \varphi + k$$





Del sistema cartesiano (x, y) tenemos:

$$xi = ri \cdot \cos\theta$$
$$yi = ri \cdot sen\theta$$

Además existe un sistema cartesiano (x', y') rotado y trasladado tal que:

$$si = ri \cdot \cos(\theta - \beta)$$
$$ti = ri \cdot sen(\theta - \beta)$$

$$si = ri \cdot (\cos\theta \cdot \cos\beta + sen\theta \cdot sen\beta) = ri \cdot \cos\theta \cdot \cos\beta + ri \cdot sen\theta \cdot sen\beta$$
$$ti = ri \cdot (sen\theta \cdot \cos\beta - \cos\theta \cdot sen\beta) = ri \cdot sen\theta \cdot \cos\beta - ri \cdot \cos\theta \cdot sen\beta$$

Pero
$$xi = ri \cdot \cos\theta$$
$$yi = ri \cdot sen\theta$$

Por lo tanto se obtiene lo siguiente:

$$si = xi \cdot \cos\beta + yi \cdot sen\beta$$
$$ti = yi \cos\beta - xi \cdot sen\beta$$

Si consideramos el factor de escala, debido a que (x, y) y (x', y') tienen distintas escalas tendremos:

$$\lambda\, s'i = \lambda\, xi\, cos\beta + \lambda\, yi\, sen\beta$$

$$\lambda\, t'i = \lambda\, yi\, cos\beta - \lambda\, xi\, sen\beta$$

Donde λ corresponde al factor de escala

$$x'i = \lambda \cdot si + k_1$$
$$y'i = \lambda \cdot ti + k_2$$
$$x'i = \lambda \cdot xi \cdot \cos\beta + \lambda \cdot yi \cdot sen\beta + k_1$$
$$y'i = \lambda \cdot yi \cdot \cos\beta - \lambda \cdot xi \cdot sen\beta + k_2$$

* k_1 corresponde al desplazamiento del sistema en el eje X

* k_2 corresponde al desplazamiento del sistema en el eje Y

Si ademas consideramos el factor de giro y escala obtendremos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a = \lambda \cdot \cos\beta \\ b = \lambda \cdot sen\beta \end{array}\right. \text{(Giro y escala)}$$
$$x'i = a \cdot xi + b \cdot yi + k_1$$
$$y'i = a \cdot yi - b \cdot xi + k_2$$

k_1 y k_2, Parametros de traslacion.
a y b, Parametros de giro y escala.

Tendremos como coordenadas de transformación lo siguiente:

a * xi + b* yi +k_1 = x'i +vxi
a * yi – b * xi +k_2 = y'i +vyi

El sistema de ecuaciones se desarrollará mediante un análisis matricial [(2), (3)]. Considerando el caso de que se dispusiera de tres puntos, la expresión matricial para encontrar los parámetros de transformación toma la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} x1 & y1 & 1 & 0 \\ y1 & -x1 & 0 & 1 \\ x2 & y2 & 1 & 0 \\ y2 & -x2 & 0 & 1 \\ x3 & y3 & 1 & 0 \\ y3 & -x3 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ b \\ k1 \\ k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'1 \\ y'1 \\ x'2 \\ y'2 \\ x'3 \\ y'3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Vx1 \\ Vy1 \\ Vx2 \\ Vy2 \\ Vx3 \\ Vy3 \end{bmatrix}$$

En un caso general se tendrá:

$$\begin{bmatrix} x1 \quad y1\ 1\ 0 \\ y1 - x1\ 0\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ xn \quad yn\ \ 1\ 0 \\ yn - xn\ 0\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ b \\ k1 \\ y1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'1 \\ y'1 \\ \\ \\ \\ \\ x'n \\ y'n \end{bmatrix} +$$

La solución encontrada queda expresada en forma matricial como sigue [2]:

$$A * X = L + V$$

$$[A^t * A] * [X] = [A^t] * [L]$$

$[X] = [A^t * A]^{-1} * [A^t] * [L]$; valor de los parámetros de transformación

$[A] * [X] - [L] = [V]$; valor de los residuales en X e Y

Precisión del Ajuste con igual peso

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{V^t} * \boldsymbol{V}}{\boldsymbol{r}}}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Smith, Percey & Sullivan, Arthur. “Elementos de Geometría Analítica”, Librería y Editorial Nigar S.R.L., segunda edición, Estados Unidos 932, Buenos Aires, 1971

[2] Mikhail, Edward & Gracie Gordon. “Analysis and Adjustment of Survey Measurement”, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1981

[3] Wolf, Paul R, & Ghilani, Charles D. “ Adjustment Computations”, Wiley – interscience Publication, New York, 1997

[4] Francis H. Moffitt and harry Bouchard. “ Surveying”. Seventh edition, Harper & Row, Publishers, New York, 1982