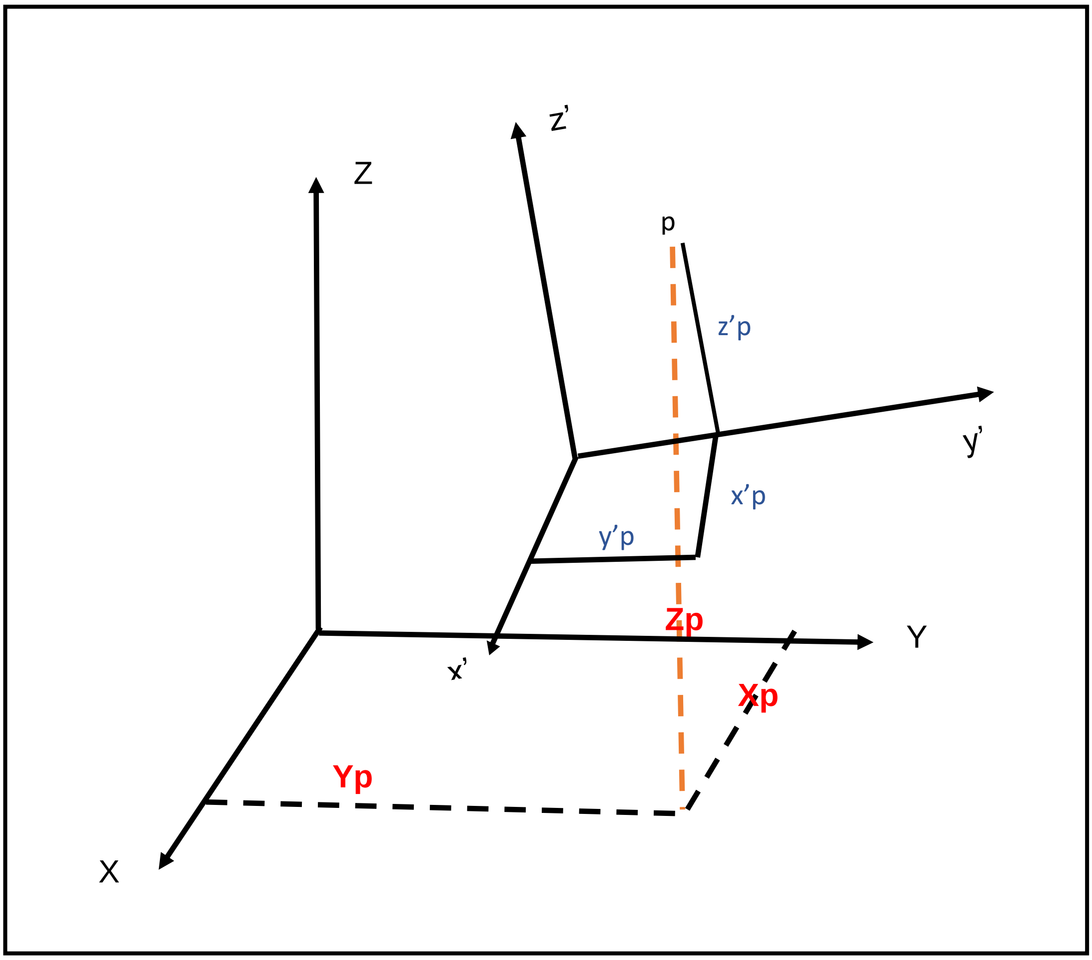
Transformación de Siete Parámetros en sistemas tridimensionales

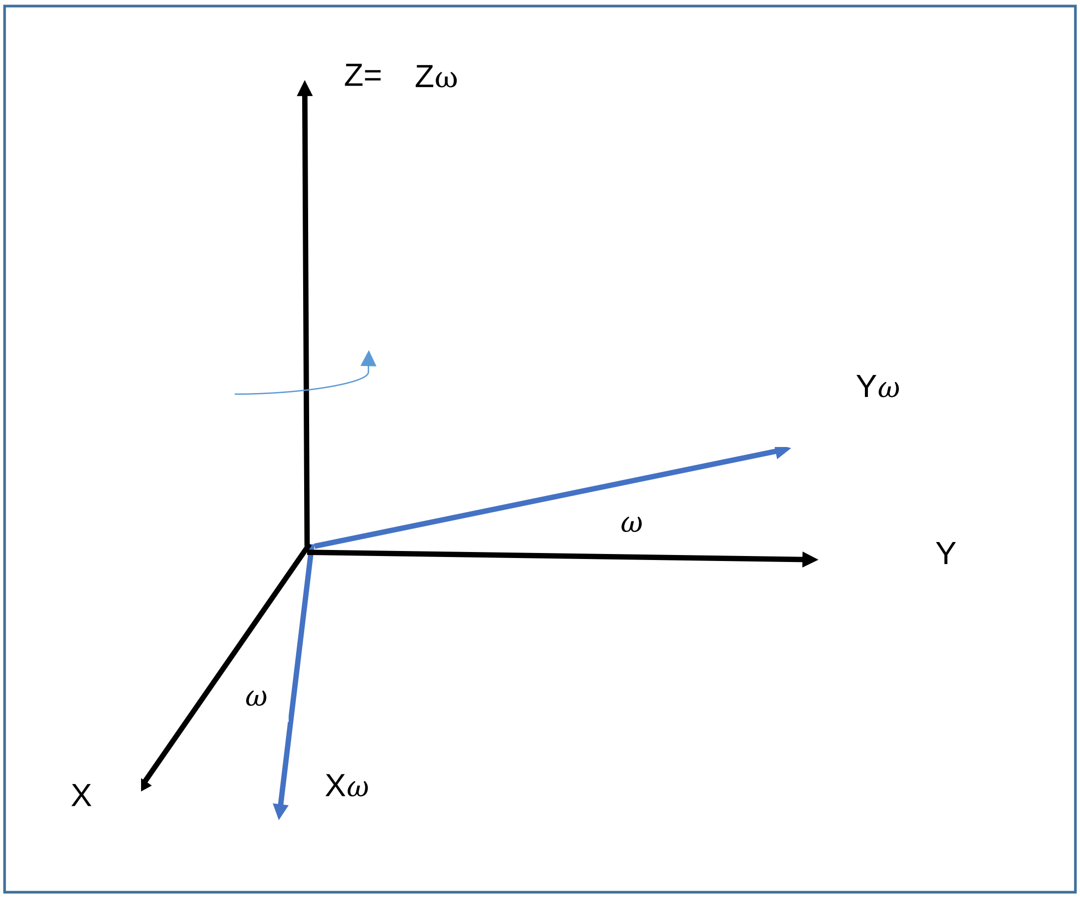


La transformación de siete parámetros entre dos sistemas geodésicos en R^3, requiere que ambos sistemas se encuentre paralelos, para lo cual es necesario corregir la rotación existente entre ambos sistemas, luego cuantificar su desplazamiento para lo que es necesario calcular los Delta X,Y,Z y finalmente cuantificar la diferencia de escala entre ambos, debido a que ellos se puede encontrar en diferentes elipsoides.

Calculo de rotaciones

Primera rotación

Rotación en el plano X, Y, el eje Z permanece constante.



$$X\omega = X\cos\omega + Y\mathrm{sen}\omega$$

$$Y\omega = -X\mathrm{sen}\omega + Y\cos\omega$$

$$Z\omega = Z$$

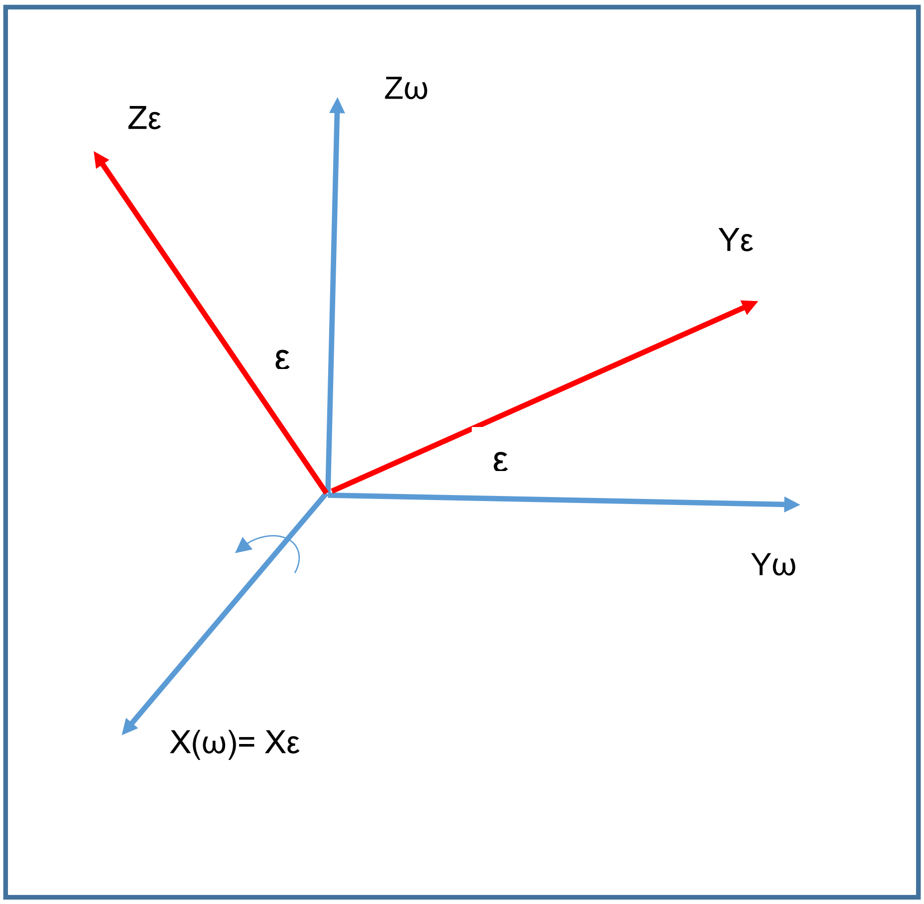
$$\begin{vmatrix} X\omega \\ Y\omega \\ Z\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega & \mathrm{sen}\omega & 0 \\ -\mathrm{sen}\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

La matriz Rotación alrededor del eje Z en un ángulo ω es:

$$R\omega = R1 = \begin{vmatrix} \cos\omega & \mathrm{sen}\omega & 0 \\ -\mathrm{sen}\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Segunda Rotación

Aquí rota el sistema en el plano Y(ω),Z(ω), el eje X(ω) permanece constante



Xε = X(ω)

Yε = Yω*cos ε+ Zω*sen ε

Zε = - Yω*sen ε + Zω*cos ε

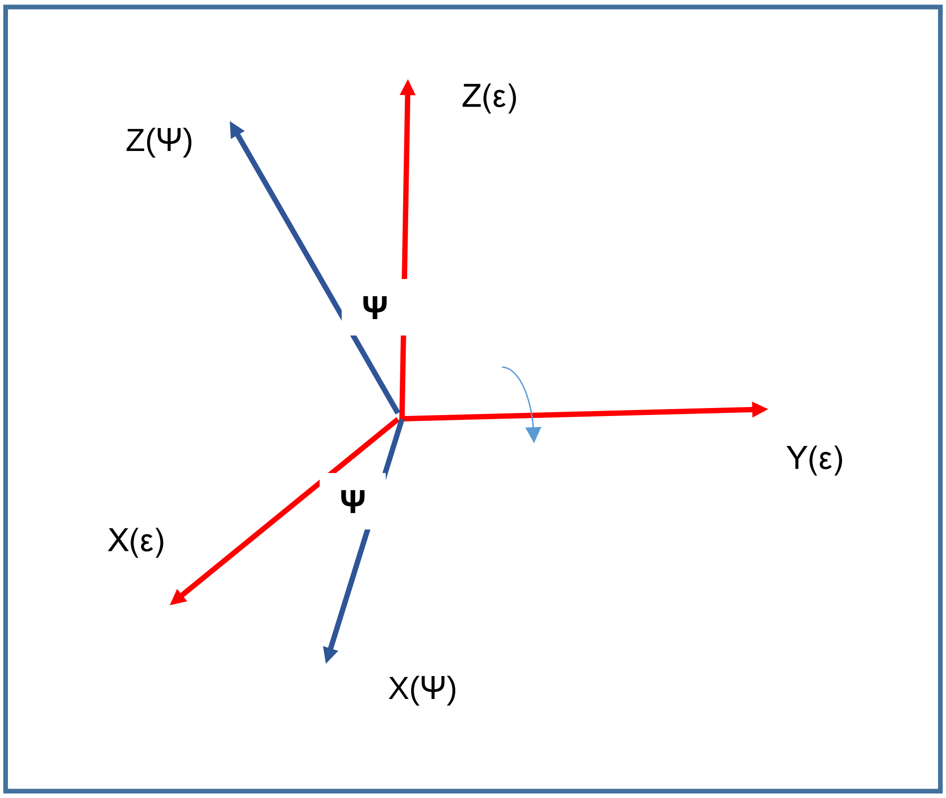
$$\begin{vmatrix} X\ \varepsilon \\ Y\ \varepsilon \\ Z\ \varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \operatorname{sen}\varepsilon \\ 0 & -\operatorname{sen}\varepsilon & \cos\varepsilon \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} X\omega \\ Y\omega \\ Z\omega \end{vmatrix}$$

La matriz rotación alrededor de X en un ángulo ω es la siguiente:

$$R\varepsilon = R2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \operatorname{sen}\varepsilon \\ 0 & -\operatorname{sen}\varepsilon & \cos\varepsilon \end{vmatrix}$$

Tercera Rotación

Aquí rota el sistema en el plano X(ε),Z(ε), el eje Y(ε) permanece constante



Y(Ψ) = Y(ε)

X(Ψ) = X(ε)*cosΨ – Z(ε)*sen Ψ

Z(Ψ) = X(ε)*senΨ + Z(ε)*cosΨ

$$\begin{vmatrix} X(\Psi) \\ Y(\Psi) \\ Z(\Psi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\Psi & 0 & -\operatorname{sen}\Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\Psi & 0 & \cos\Psi \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} X(\varepsilon) \\ Y(\varepsilon) \\ Z(\varepsilon) \end{vmatrix}$$

La matriz de rotación alrededor del eje Y en un ángulo Ψ es la siguiente:

$$R(\Psi) = R3 = \begin{vmatrix} \cos\Psi & 0 & -\operatorname{sen}\Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\Psi & 0 & \cos\Psi \end{vmatrix}$$

Factor de Escala

Este factor se origina al pasar de un elipsoide a otro como consecuencia de la diferencia de tamaño entre ambos, esto origina que exista una alteración en las distancias proyectadas. Este factor se presenta como:

F = (1+ Δ L)

F= Factor de Escala

Δ L = Es el delta de que se produce como consecuencia de la diferencia de tamaño entre los elipsoides.

La trasformación de coordenadas al sistema x´,y´,z´, referidas al sistema X,Y,Z, queda dado por la siguiente matriz:

$$\begin{vmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} + (1+\Delta L) * \begin{vmatrix} cos\omega & sen\omega & 0 \\ -sen\omega & cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \operatorname{sen}\varepsilon \\ 0 & -\operatorname{sen}\varepsilon & \cos\varepsilon \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \cos\Psi & 0 & -\operatorname{sen}\Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\Psi & 0 & \cos\Psi \end{vmatrix}$$

Considerando que los ángulos de rotación son muy pequeños, los valores de sus senos se adoptan como el valor del ángulo, el valor de los cosenos tiende a ser 1 y de producto de los senos de los ángulos tienden a ser cero, luego la matriz rotación queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & -\Psi \\ -\omega & 1 & \varepsilon \\ \Psi & -\varepsilon & 1 \end{vmatrix}$$

La matriz de transformación adquiere la siguiente expresión:

$$\begin{vmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} + (1+\Delta L) * \begin{vmatrix} 1 & \omega & -\Psi \\ -\omega & 1 & \varepsilon \\ \Psi & -\varepsilon & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (1+\Delta L) & \omega+\Delta L & -(\Psi+\Delta L) \\ -\omega-\Delta L & (1+\Delta L) & \varepsilon+\epsilon\Delta L \\ \Psi+\Delta L & -\varepsilon-\epsilon\Delta L & (1+\Delta L) \end{vmatrix}$$

Como los valores angulares de ϵ, ψ y ω son pequeños. El producto de estos ángulos con el valor de ΔL tiende a ser cero, luego el producto de la matriz rotación con el factor de escala queda:

$$\begin{vmatrix} (1+\Delta L) & \omega & -\Psi \\ -\omega & (1+\Delta L) & \varepsilon \\ \Psi & -\varepsilon & (1+\Delta L) \end{vmatrix}$$

Si (1+ΔL) = F, entonces:

$$\begin{vmatrix} F & \omega & -\Psi \\ -\omega & F & \varepsilon \\ \Psi & -\varepsilon & F \end{vmatrix}$$

Las coordenadas locales quedan transformadas (x´t, y´t, z´t) al sistema Global mediante la resolución de este sistema de matrices.

El Modelo de Molodensky-Badekas relaciona los parámetros de escala y rotación a un punto medio (m).

$$\begin{vmatrix} x´t \\ y´t \\ z´t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x´ \\ y´ \\ z´ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F & \omega & -\Psi \\ -\omega & F & \varepsilon \\ \Psi & -\varepsilon & F \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x'-xm \\ y'-xm \\ z'-zm \end{vmatrix}$$

- x’t,y’t,z’t, son coordenadas del sistema local transformadas al sistema del Datum global
- (x’$_i$-m), (y’i-m), (z’i-m), son coordenadas locales del punto i referidas a la posición media local del sistema que se está transformando